Úkol č. 4

4.1 Stanovte obsah části kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (kde $a > 0$ je parametr), kterou z ní vytíná válcová plocha určená podmínkami $x^2 + y^2 = ax$ a $z \geq 0$.

4.2 Kapalina s hustotou 1 protéká s rychlostí danou polem $\vec{v}(x, y, z) = (y,\ 1,\ z)$. Určete průtok kapaliny směrem vzhůru plochou S, která je částí paraboloidu $z = 9 - \frac{(x^2+y^2)}{4}$ pro $x^2 + y^2 \leq 36$ (neboli určete $\iint\limits_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$)

4.3 Pomocí Greenovy věty určete $\int\limits_C \vec{F}\, d\vec{s}$, kde $\vec{F}(x, y) = \left(y^2 - \operatorname{actg}(e^x),\ -x^2 + \sqrt{1 + \sin y}\right)$ a C je křivka $x^2 + y^2 - 2x = 0$ s kladnou orientací.

4.4 Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int\limits_C \vec{F} d\vec{s}$, kde $\vec{F}(x, y, z) = (2z,\ 4x,\ 5y)$ a C je průnik roviny $z = x + 4$ s válcem $x^2 + y^2 = 4$. Plocha C je orientovaná směrem dolů.

4.5 Pomocí Greenovy věty spočítejte $\int\limits_C \vec{F} d\vec{s}$, kde $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x, x^2 + 2y \cos x)$ a C je cesta podél celé hranice trojúhelníka postupně procházející vrcholy $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$ (v tomto pořadí).

4.6 Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\iint\limits_S \operatorname{rot}(\vec{F}) d\vec{S}$, kde $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z,\ xz,\ x^2 y^2)$ a C je částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 1$ a je orientovaná vzhůru.

4.7 Spočítejte práci síly $\vec{F}(x, y, z) = \left(e^{\cos x} + z^2,\ e^{\cos y} + x^2,\ e^{\cos z} + y^2\right)$ vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ležící v oktantu $x \leq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Okraj plochy je orientován posloupností bodů $(2, 0, 0) \to (0, 2, 0) \to (-2, 0, 0)$.

4.8 Pomocí Gaussovy věty spočítejte $\iint\limits_S \vec{F} d\vec{S}$, kde $\vec{F}(x, y, z) = \left(xy,\ y^2 + e^{xz},\ \sin(xy)\right)$, S je povrch oblasti vymezené parabolickým válcem $z = 1 - x^2$ a rovinami $z = 0$, $y = 0$ a $z + y = 2$. Povrch S uvažujte s vnější orientací.

4.9 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (3x,\ yz,\ 2xz)$ horní polovinou sféry se středem v počátku a poloměrem 1. Polosféru uvažujeme s orientací vzhůru.
(Návod: sféru doplňte podstavou a pro tuto vymezenou oblast E použijte Gaussovu větu.)