1. cvičení z Matematické analýzy 2

20. - 24. února 2023

1.1 Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$,

(b) $f(x,y) = \ln\left(x\ln(y-x)\right)$.

Řešení:

(a) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a čitatel nesmí být nulový.

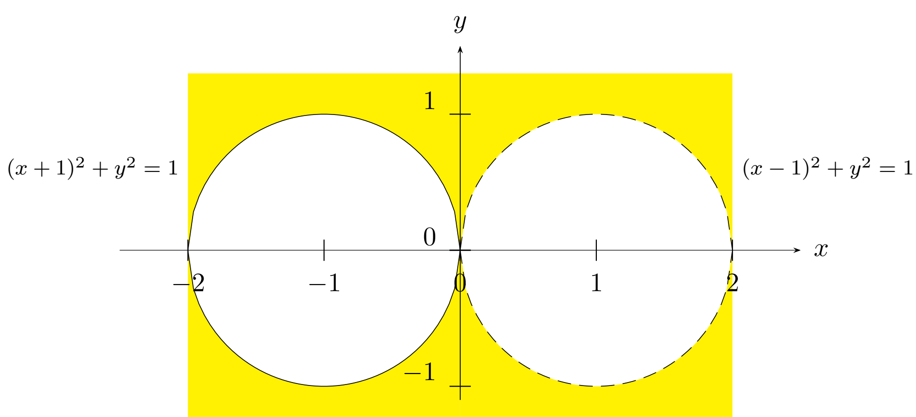
$$D(f): \ (x^2+2x+y^2 \geq 0 \ \wedge \ x^2-2x+y^2 > 0) \ \vee \ (x^2+2x+y^2 \leq 0 \ \wedge \ x^2-2x+y^2 < 0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec (tedy vhodným použitím vzorce $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$) můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$D(f): \ \Big((x+1)^2+y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-1)^2+y^2 > 1\Big) \ \vee \ \Big((x+1)^2+y^2 \leq 1 \ \wedge \ (x+1)^2+y^2 < 1\Big)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$D(f): \ (x+1)^2+y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-1)^2+y^2 > 1$$



(b) Argument v každém z logaritmů musí být kladný.

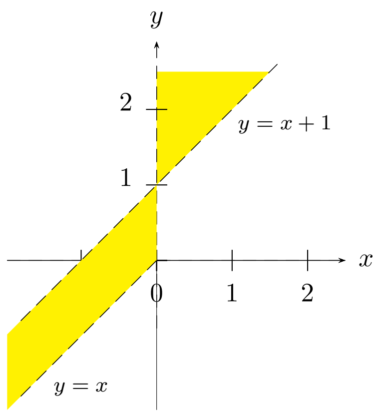
$$D(f): \ y-x > 0 \wedge \Bigg(\Big(x > 0 \ \wedge \ \ln(y-x) > 0\Big) \ \vee \ \Big(x < 0 \ \wedge \ \ln(y-x) < 0\Big)\Bigg)$$

tedy

$$D(f): \ (x > 0 \ \wedge \ y-x > 1) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ 0 < y-x < 1)$$

neboli

$$D(f): \ (x > 0 \ \wedge \ x + 1 < y) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x < y < x + 1) \ .$$



1.2 Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - x + y^2}{2x - x^2 - y^2}}$,

(b) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x - y + 2}{x^2 - y}\right)$.

Řešení:

(a) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a čitatel nesmí být nulový.

$$D(f): \ (x^2 - x + y^2 \geq 0 \ \wedge \ 2x - x^2 - y^2 > 0) \ \vee \ (x^2 - x + y^2 \leq 0 \ \wedge \ 2x - x^2 - y^2 < 0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec, tedy použitím vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ např. pro

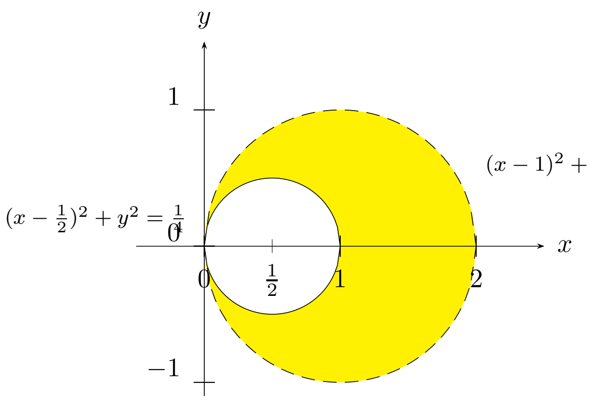
$$x^2 - x = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2\right) - (\tfrac{1}{2})^2 = (x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2$$

můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$D(f): \ \left((x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x - 1)^2 + y^2 < 1\right) \ \vee \ \left((x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x - 1)^2 + y^2 > 1\right)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$D(f): \ \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x - 1)^2 + y^2 < 1$$

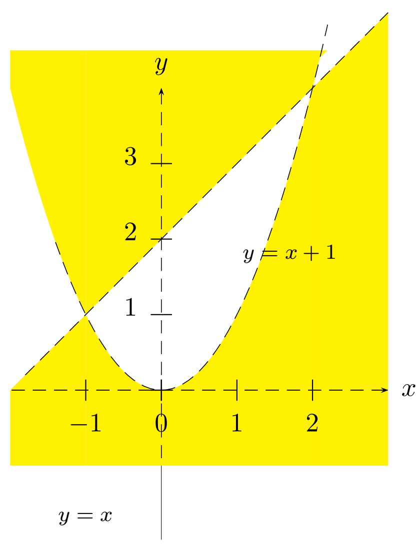


(b) Argument v logaritmu musí být kladný.

$$D(f):\ \Big(x-y+2>0\ \wedge\ x^2-y>0\Big)\ \vee\ \Big(x-y+2<0\ \wedge\ x^2-y<0\Big)$$

tedy

$$D(f):\ (y<x+2\ \wedge\ y<x^2)\ \vee\ (y>x+2\ \wedge\ y>x^2)\ .$$



1.3 Načtrněte množiny:

(a) $x^2+y^2+z^2\leq 1\ \wedge\ x^2+y^2\geq x$;

(b) čtyřstěn s vrcholy $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$.

Řešení:
(a) Jde o kouli ($x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$), ze které byl vyjmut válec ($(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$).

1.4 Načtrněte množiny:

(a) $x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ x + z \geq 1$;

(b) $x + y + z \leq 1 \ \wedge \ x, y, z \geq 0$.

Řešení:

(a) Jde o válec ($x^2 + y^2 \leq 1$) seříznutý šikmo rovinou $x + z = 1$.

(b) Jde o čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$.

Definice: Pro funkci f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definujeme vrstevnici na hladině $c \in \mathbb{R}$ jako množinu

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in D(f) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \ .$$

Zde $D(f)$ je definiční obor funkce f.

(Zdůrazněme, že vrstevnice obvykle bývají objekty s dimenzí $n - 1$. Ale není to vždy pravidlem!)

Poznámka: Nechť g je nějaká funkce z $\langle 0, +\infty)$ do $\mathbb{R}$. Graf funkce tvaru $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ je rotačně symetrický podle osy z, a vznikne rotací grafu funkce g kolem osy z. Vrstevnice funkce f jsou složeny z kružnic. (Nemusí to ale být vždy jen prosté kružnice, nýbrž také např. mezikruží).

1.5 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf a popište vrstevnice:

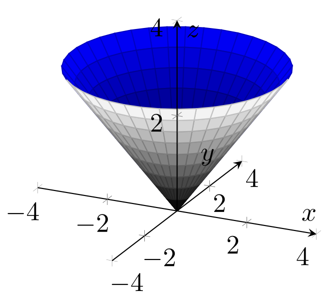
(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (kužel)

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ (eliptický paraboloid),

(c) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ (jedna z částí dvoudílného rotačního hyperboloidu).

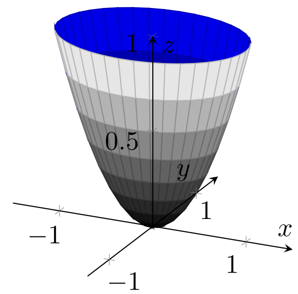
Řešení:
Označme si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hodnota r představuje vzdálenost bodu (x, y, z) od 3. osy (tj. osy z).

(a) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = r$, pro $r \geq 0$. Jde tedy o kužel a vrstevnice jsou soustředné kružnice:



(b) Uvažujme nejdříve funkci $h(x, y) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$. Její graf (tzv. rotační paraboloid) vznikne rotací grafu funkce $g(r) = r^2$, pro $r \geq 0$ (tj. rotací paraboly). Graf funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2 =$

$h(x, \sqrt{2}y)$ se od něj bude lišit zúžením ve směru y. Průřezy (tj. vrstevnice) grafu f tak budou soustředné elipsy a celý graf se pak označuje jako eliptický paraboloid.



(c) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = \sqrt{4 + r^2}$, pro $r \geq 0$. Abychom zjistili, o co jde, přepíšeme si $z = \sqrt{4 + r^2}$, $r \geq 0$ ekvivalentně jako $z^2 - r^2 = 4$, $z \geq 0$, $r \geq 0$. Graf funkce g je tedy část hyperboly, jejíž hlavní osou je osa z. Její rotací (kolem osy z) vznikne část (jeden díl) dvoudílného rotačního hyperboloidu. Vrstevnice jsou soustředné kružnice a celý útvar zdálky připomíná kužel (který je "asymptotou" celého grafu).