10. cvičení z Matematické analýzy 2

24. - 28. dubna 2023

10.1 (sférické souřadnice)
Spočítejte

$$\iiint\limits_E x^2 z \; dV$$

kde

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 1 \quad \& \quad 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Řešení:
Těleso E je horní polokoule s vyjmutým kuželem, jehož špička je ve středu koule. Parametrizace pomocí sférických souřadnic je

$$\Psi: \quad \begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

s oblastí parametrizace

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Tedy

$$\iiint\limits_E x^2 z \; dV = \iiint\limits_U r^3 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \cos\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta \; dV = \int\limits_0^1 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^5 \sin^3\vartheta \cos\vartheta \cos^2\varphi \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 r^5 \; dr\right) \cdot \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \; d\varphi\right) = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} \cdot \pi = \frac{\pi}{32}$$

10.2 (obecnější sférické souřadnice)
Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \quad \& \quad x, y, z \ge 0,$$

s hustotou $\sigma = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:

Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x/a & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y/b & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z/c & = & r\cos\vartheta \end{array},$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}' \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}') \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin\vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti m oblasti E si usnadníme znalostí objemu koule o poloměru 1 (označme ji jako K) a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého původního elipsoidu, který označme např. jako F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$m = \iiint_E 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint_K |\det \mathcal{L}'| \; dV =$$

$$= \frac{abc}{8} \iiint_K 1 \; dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint_U (cr\cos\vartheta) \cdot (abc\; r^2 \sin\vartheta) \; dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; d\varphi \right) = \frac{3}{8}c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.

Připomenutí: Integrál z funkce f podél křivky $\mathcal{C}$ spočítáme podle vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f \; ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)|| \; dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky $\mathcal{C}$, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ (tj. křivka může být v některých bodech "zlomená", ale stále to má být souvislá čára),
- až na konečně mnoho výjimek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b \rangle$ platí, že:

φ je prosté na $\langle a,b\rangle$ a $\|\varphi'(t)\| \neq 0$ pro $t \in \langle a,b\rangle$ (tj. křivka může protínat konečněkrát sama sebe a vektor rychlosti chceme mít nenulový až konečně mnoho výjimek),

- $\varphi(\langle a,b\rangle) = \mathcal{C}$.

Integrál z funkce nezávisí na volbě orientace křivky. Změnu orientace lze vždy provést např. jako

$$\psi(t) := \varphi(a+b-t) \ \text{ pro } \ t \in \langle a,b\rangle \ .$$

10.3 (délka křivky)

Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi: \quad x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \le t \le 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení:

Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b ||\varphi'(t)|| \; dt \quad \Big(= \int_\Gamma 1 \; ds \Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ. Máme

$$\varphi'(t) = \Big(1 - \cos t, \ \sin t\Big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1 \; ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \; dt = \Big[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix} \Big] = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(2u)} \; du =$$

$$= \Big\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \Big\} = 4 \int_0^{\pi} \sin u \; du = 8 \ .$$

10.4 (délka křivky)

Určete délku asteroidy $\mathcal{C}: \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, kde $a > 0$ je parametr. (Návod: použijte parametrizaci

$$\varphi: \quad x = a\cos^3 t \ \ \& \ \ y = a\sin^3 t \ \ \& \ \ 0 \le t \le 2\pi.)$$

Řešení:

Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3a\cos^2 t \cdot \sin t, \ 3a\sin^2 t \cdot \cos t\Big) = 3a\cos t \cdot \sin t \cdot \Big(-\cos t, \ \sin t\Big).$$

tedy

$$\|\varphi'(t)\| = 3a|\cos t \sin t|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3a|\cos t \sin t| \ .$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} 1 \ ds = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| \ dt = \int_0^{2\pi} 3a|\cos t \sin t| \ dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \ dt =$$

$$= 6a \left[\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \ .$$

10.5 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1,0)$ do bodu $(0,0)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(-1,2)$.

Řešení:

• parametrizace $\mathcal{C}_1$: Křivka splňuje rovnici $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1 : \quad x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos t, \quad y = \tfrac{1}{2}\sin t \quad \text{pro} \quad 0 \le t \le \pi.$$

$$\varphi_1'(t) : \quad x'(t) = -\tfrac{1}{2}\sin t, \quad y'(t) = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad \text{a} \qquad ||\varphi_1'(t)|| = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}\sin t)^2 + \tfrac{1}{4}\cos^2 t} = \tfrac{1}{2}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_1} \sqrt{x^2+y^2} \ ds = \int_0^{\pi} \sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_1(t)} \cdot ||\varphi_1'(t)|| \ dt = \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos t)^2 + (\tfrac{1}{2}\sin)^2 t} \ dt =$$

$$= \tfrac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos t} \ dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix} \right] = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(2u)} \ du =$$

$$= \left\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \right\} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \ du = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

• parametrizace $\mathcal{C}_2$: $\varphi_2(t) = (0,0) + t(-1,2) = (-t, 2t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\varphi_2'(t) = (-1,2) \qquad \text{a} \qquad ||\varphi_2'(t)|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_2} \sqrt{x^2+y^2} \ ds = \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}_{|\varphi_2(t)} \cdot ||\varphi_2'(t)|| \ dt = \int_0^1 5t \ dt = \frac{5}{2} \ .$$

Celkem tedy máme

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,ds = \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{C}_i} (x+y)\,ds = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$$

10.6 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: levá polovina kružnice o poloměru 1 se středem v $(0,1)$ jdoucí v záporném smyslu z bodu $(0,0)$ do bodu $(0,2)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0,2)$ do bodu $(1,0)$.

Řešení:
• parametrizace $\mathcal{C}_1$: Křivka splňuje rovnici $x^2+(y-1)^2=1$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi_1: \quad x=\cos t, \quad y = 1+\sin t \ \text{ pro } \ \tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{3\pi}{2}.$$

Tato parametrizace však probíhá křivku v opačném směru! To ale nevadí, protože integrál z funkce nezávisí na volbě orientace.

$$\varphi_1'(t): \quad x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t \qquad \text{a} \qquad ||\varphi_1'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t} = 1.$$

Takže

$$\int_{\mathcal{C}_1} (x+y)\ ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x+y)_{|\varphi_1(t)} \cdot ||\varphi_1'(t)||\ dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1+\sin t+\cos t\ dt = \pi+2\ .$$

• parametrizace $\mathcal{C}_2$: $\varphi_2(t) = (0,2)+t(1,-2) = (t, 2-2t), \quad t \in \langle 0,1 \rangle$

$$\varphi_2'(t) = (1,-2) \qquad \text{a} \qquad ||\varphi_2'(t)|| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}_2} (x+y)\ ds = \int_0^1 (x+y)_{|\varphi_2(t)} \cdot ||\varphi_2'(t)||\ dt = \int_0^1 (2-t)\sqrt{5}\ dt = \frac{3\sqrt{5}}{2}\ .$$

Celkem tedy máme

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,ds = \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathcal{C}_i} (x+y)\,ds = \pi+2+\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Připomenutí: Integrál z vektorového pole $\vec{F}$ podél dané orientované křivky $\mathcal{C}$ počítáme jako práci síly podél této křivky s normovaným tečným polem $\vec{T}$ (jež určuje orientaci křivky $\mathcal{C}$).
Jestliže parametrizace $\varphi: \langle a,b \rangle \to \mathcal{C}$ odpovídá zvolené parametrizaci, pak máme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt\ .$$

Pokud parametrizace φ je v opačném směru než námi zvolená orientace $\mathcal{C}$, pak máme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt\ .$$

10.7 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy\ dx - x^2\ dy$$

kde $\mathcal{C}$ je část paraboly $x = 2y^2$ jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, 1)$.

Řešení:
Máme pole $\vec{F} = (2xy,\ -x^2)$. Křivku můžeme parametrizovat např. pomocí souřadnice y:

$$\varphi:\quad x = 2t^2,\quad y = t \ \text{ pro }\ 0 \le t \le 1.$$

$$\varphi'(t):\quad x'(t) = 4t,\quad y'(t) = 1\ .$$

Parametrizace má orientaci souhlasnou se zvolenou orientací. Takže

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy,\ -x^2)_{|\varphi_2(t)} \cdot \varphi_2'(t)\ dt = \int_0^1 \left(4t^3,\ -4t^4\right) \cdot \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix}\ dt = 12\int_0^1 t^4\ dt = \frac{12}{5}\ .$$

10.8 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

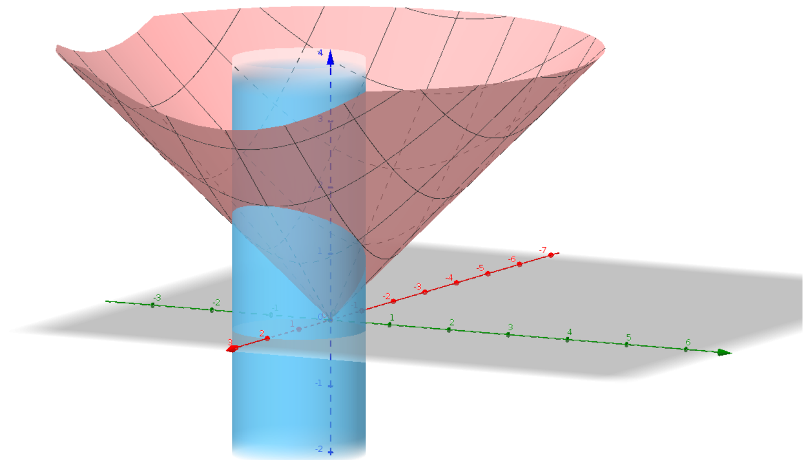
$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}:\quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \ge 0$$

je křivka s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení:
Máme pole $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ je to samé jako $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (což je válec). Křivka představuje tedy průnik kuželu s válcem jehož poloměr je 1 a osa kužele leží v plášti válce.



Parametrizaci uděláme pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = h$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 = h^2 \quad \& \quad r^2 = 2r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 2\cos\varphi$, $h = r = 2\cos\varphi$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 2\cos^2\varphi\ , \quad y(\varphi) = 2\cos\varphi\sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = 2\cos\varphi \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Opět můžeme využít formu, ve které byl integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y(\varphi)\cdot\frac{dx}{d\varphi} + z(\varphi)\cdot\frac{dy}{d\varphi} + x(\varphi)\cdot\frac{dz}{d\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\cdot \underbrace{4\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}_{=\sin^2(2\varphi)=\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}} + 4\cos\varphi\cdot(\underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=1-2\sin^2\varphi}) - 4\underbrace{\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}_{\text{lichá funkce}}\right) d\varphi =$$

$$= -2\Big[\tfrac{\varphi}{2} - \tfrac{1}{8}\sin(4\varphi)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4\Big[\sin\varphi - \tfrac{2}{3}\sin^3\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \frac{8}{3} - \pi\ .$$

Jiná parametrizace pomocí posunutých válcových souřadnic:

$$x = 1 + r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = h$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$|h| = \sqrt{2r}\sqrt{1+\cos\varphi} \quad \& \quad r^2 = 1 \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 1$, $h = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi} = 2|\cos\frac{\varphi}{2}|$ a $-\pi \le \varphi \le \pi$. Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 1 + \cos\varphi\ , \quad y(\varphi) = \sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = 2\cos\tfrac{\varphi}{2} \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

která má požadovanou orientaci.

Nyní máme:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(y(\varphi),\ z(\varphi),\ x(\varphi) \Big) \cdot \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \\ z'(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sin\varphi,\ 2\cos\tfrac{\varphi}{2},\ 1+\cos\varphi \Big) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ -\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -\sin^2\varphi + \underbrace{2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\varphi}_{\cos(\frac{\varphi}{2}+\varphi)+\cos(\frac{\varphi}{2}-\varphi)} - \sin\frac{\varphi}{2} - \underbrace{\cos\varphi\cdot\sin\frac{\varphi}{2}}_{\frac{1}{2}\sin(\varphi+\frac{\varphi}{2})-\frac{1}{2}\sin(\varphi-\frac{\varphi}{2})} \, d\varphi =$$

$$= -\pi + \Big[\tfrac{2}{3}\sin(\tfrac{3}{2}\varphi) + 2\sin(\tfrac{\varphi}{2}) + 2\cos(\tfrac{\varphi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos(\tfrac{3}{2}\varphi) - \cos(\tfrac{\varphi}{2}) \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{3} - \pi\ .$$

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

a tedy

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y) \Big)$$

a

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

a tedy

$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) - \sin(x-y) \Big)\ .$$

10.9 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

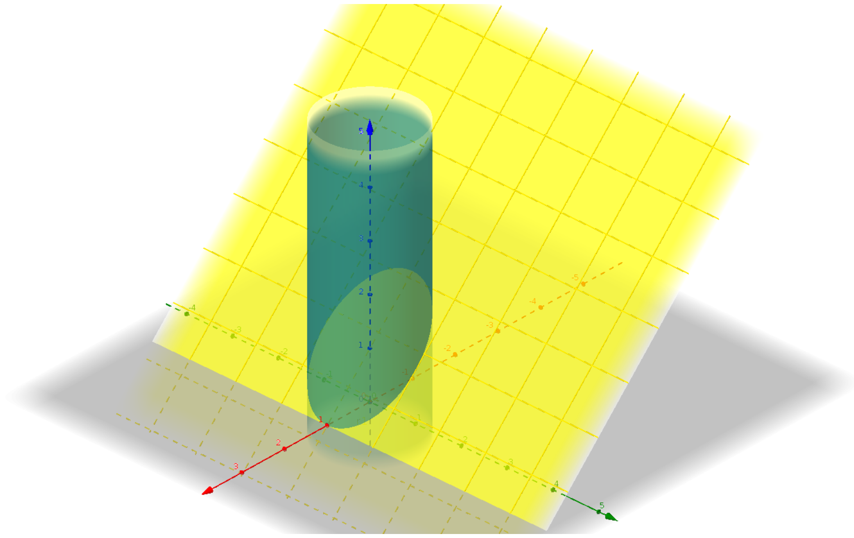
kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad x + z = 1$$

je křivka s kladnou orientací při pohledu shora.

Řešení:

Máme pole $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Křivka představuje průnik válce a šikmé roviny.



Je to tedy elipsa a její orientace je určena pomocí průmětu $\mathcal{C}$ do roviny xy, v němž má mít tento průmět kladnou orientaci (tím je myšleno to "při pohledu shora", tj. když se na křivku budeme dívat tak, aby osa z směřovala k nám).

Průmět $\mathcal{C}$ do roviny xy má rovnici $x^2+y^2 = 1$ a jeho kladná orientace je určena obvyklou parametrizací

$$x(t) = \cos t \ , \quad y(t) = \sin t \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \ .$$

Tím je určena i poslední složka, tj.

$$z(t) = 1 - x(t) = 1 - \cos t \ .$$

Pro parametrizaci jsme zde vlastně využili válcové souřadnice, které po dosazení do rovnosti určujících $\mathcal{C}$ poskytnou vztahy mezi jednotlivými parametry (výsledkem musí být jen jeden volný parametr, protože křivka je jednodimenzionální objekt).

Pro výpočet můžeme využít také formu, ve které je integrál zadán:

$$\int_{\mathcal{C}} y \ dx + z \ dy + x \ dz = \int_0^{2\pi} \left(y(t) \cdot \frac{dx}{dt} + z(t) \cdot \frac{dy}{dt} + x(t) \cdot \frac{dz}{dt} \right) \ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\sin t \cdot (-\sin t) + (1 - \cos t) \cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t \Big) \ dt = \int_0^{2\pi} (-1 + \cos t + \cos t \cdot \sin t) \ dt =$$

$$= -2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t \ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2} \ dt}_{=0} = -2\pi \ .$$