12. cvičení z Matematické analýzy 2

8. - 12. května 2023

Definice konzervativního pole: Spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené a obloukově souvislé množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (tedy každé dva body v U lze propojit alespoň jednou křivkou ležící v U) nazýváme *konzervativní*, pokud práce síly z bodu A do bodu B nezávisí na způsobu, jakým oba body propojíme (na bodech A a B ale záviset může). V tom případě pro tuto práci volíme značení $\int\limits_A^B \vec{F}\, d\vec{s}$.

Věta (o potenciálu): Následující podmínky jsou ekvivalentní pro spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené obloukově souvislé množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

- pole $\vec{F}$ je konzervativní na U,
- práce pole $\vec{F}$ podél jakékoliv uzavřené křivky $\mathcal{C} \subseteq U$ je nulová,
- existuje funkce (tzv. *potenciál*) $f : U \to \mathbb{R}$, že $\operatorname{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int\limits_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \int\limits_A^B \operatorname{grad}(f)\, d\vec{s} = f(B) - f(A)\,.$$

Definice jednoduše souvislé množiny: Množina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže se jakákoliv uzavřená křivka v U dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu.

Příkladem jednoduše souvislé množiny je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
Příkladem otevřené množiny, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "přímka" nebo torus (tj. "pneumatika").

Definujme si tzv. rotaci pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ jako

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \ -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z},\ \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Věta: Pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené obloukově souvislé množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ platí:

- $\vec{F}$ je konzervativní $\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)$ pro všechna $a \in U$ a $i, j = 1, \dots, n$.

  (tato podmínka vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací potenciálu f)
- pro $n = 3$: $\vec{F}$ je konzervativní $\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$
- Jestliže množina U je *jednoduše souvislá* a $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)$ pro všechna $a \in U$ a $i, j = 1, \dots, n$, pak $\vec{F}$ je konzervativní.

Poznámka: Podmínka rovnosti parc. derivací je obecně opravdu jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

na množině $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je nenulová:

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} 1\, d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{na} \qquad U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

nebo

$$f_2(x, y) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{na} \qquad U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

12.1 (konzervativní pole, potenciál)

Určete hodnotu parametru α tak, aby následující pole byla konzervativní. Najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y, \quad y^2+\alpha x, \quad ze^z)$, $A=(0,1,0)$, $B=(-1,1,0)$.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z, \quad x+z, \quad x+\alpha y)$, $A=(0,0,0)$, $B=(1,1,1)$.

Řešení:

(i) Po dosazení máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0-0, \quad 0-0, \quad \alpha-1)\,,$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ právě když $\alpha=1$ a pole $\vec{F}$ pak má potenciál. Počítání rotace pole nám tedy sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případné) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud nás tedy zajímá pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci a pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup a v tom případě je počítání rotace zbytečné.

Potenciál je funkce $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= x^2+y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= y^2+\alpha x \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= ze^z\ .
\end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2+y)\ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2+\alpha x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3}+xy+C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2 + (\alpha-1)x.$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x, tedy i pravá strana na ní nesmí záviset, takže musí být $\alpha=1$. Pak máme

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3}+xy+\frac{y^3}{3}+D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1,1,0) - f(0,1,0) = -2 - \Big(-\frac{2}{3}\Big) = -\frac{4}{3}\ .$$

- -

(ii) Pokud se nám podaří najít potenciál, nepotřebujeme počítat rotaci. A naopak, jestliže rovnice pro potenciál nebudou řešitelné, tak pole nemůže být konzervativní.

Pro potenciál f máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y + z \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + z \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x + \alpha y \quad . \end{aligned}$$

Z první rovnice máme:

$$f(x,y,z) = \int y + z\ dx = xy + xz + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$x + z = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy + xz + C(y,z)\Big) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = z.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int z\ dy = yz + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$x + \alpha y = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(xy + xz + yz + D(z)\Big) = x + y + \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $\frac{\partial D}{\partial z}(z) = (\alpha - 1)y$, a tudíž $\alpha = 1$, jinak by pravá strana závisela na y, zatímco levá ne. Dále máme $\frac{\partial D}{\partial z} = 0$ a tedy $D(z) = K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál pouze pro $\alpha = 1$ a to

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 3 - 0 = 3\ .$$

Připomenutí: Plošný integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ na ploše $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je určený jako

$$\iint_M f \; dS = \iint_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \; dS \; ,$$

kde $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : U \to M$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je vhodná parametrizace plochy M a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \; .$$

.

12.2 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(i)

$$\iint_M z \; dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 2$ vymezená rovinou $z = 0$ a plochou $z = x^2 + (y-1)^2$.

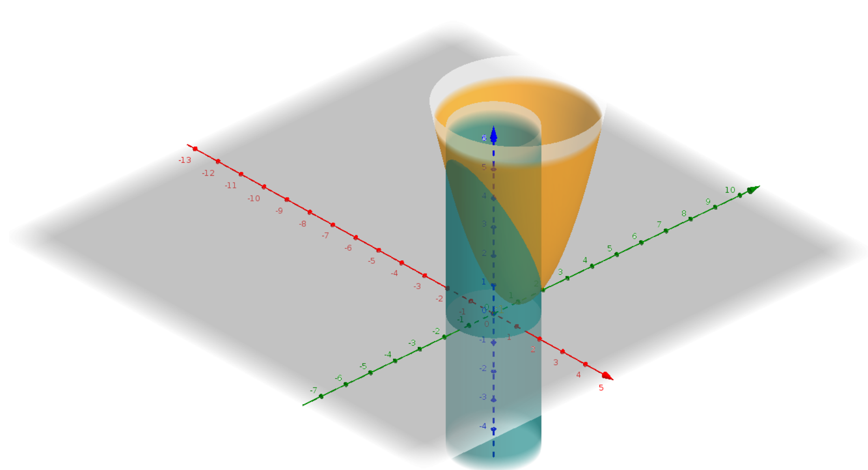
(ii)

$$\iint_M x^2 z + y^2 z \; dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení:
(i) Plocha je určena jako

$$M : \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq x^2 + (y-1)^2.$$



Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

kde po dosazení z první podmínky dostaneme $r^2 = 2$ a po dosazeni $r = \sqrt{2}$ z druhé podmínky pak

$$0 \leq h \leq (\sqrt{2}\cos\varphi)^2 + (\sqrt{2}\sin\varphi - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi$$

Tím dostaneme předpis

$$\Phi(\varphi, h) = (\sqrt{2}\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi, h)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq h \leq 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi.$$

Dále je

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (-\sqrt{2}\sin\varphi, \quad \sqrt{2}\cos\varphi, \quad 0) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\quad 0, \quad 0, \quad 1) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\ \sqrt{2}\cos\varphi, \quad \sqrt{2}\sin\varphi, \quad 0) \end{aligned}$$

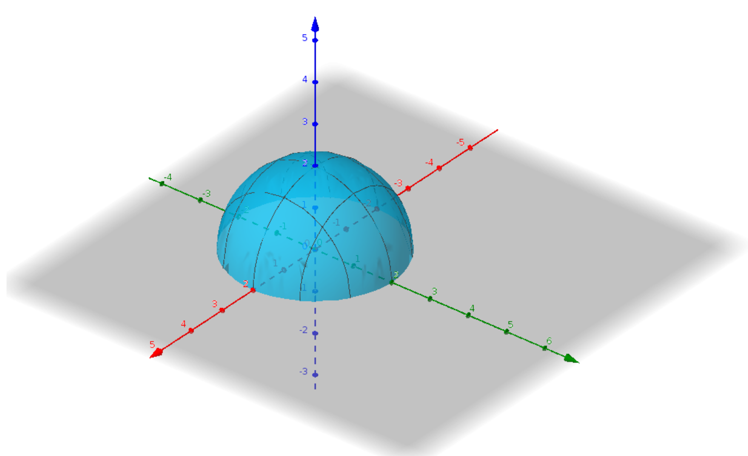
$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial h} \right\| = \sqrt{2}.$$

Takže pro funkci $f(x, y, z) = z$ máme

$$\iint\limits_M f\ dS = \iint\limits_U z\ dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{3-2\sqrt{2}\sin\varphi} h \cdot \sqrt{2}\ dh\ d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi)^2}{2}\ d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} - 6\sqrt{2}\sin\varphi + 4\sin^2\varphi\right)\ d\varphi = \sqrt{2}(9\pi + 0 + 4\pi) = 13\sqrt{2}\pi.$$

(ii) Plocha $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\ \&\ z \geq 0\}$ je polovina sféry.



Zparametrizujeme ji pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (-2\sin\vartheta\sin\varphi, \quad 2\sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \quad) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= (\ 2\cos\vartheta\cos\varphi, \quad 2\cos\vartheta\sin\varphi, \quad -2\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \ dS = \iint\limits_U \left(8\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) \cdot 4|\sin\vartheta| \ dS = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\vartheta\cos\vartheta \ d\vartheta \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1 \ d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi \Big[8\sin^4\vartheta \Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

Připomenutí: Tok vektorového pole $\vec{F} : M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right) dS \ ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

12.3 (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

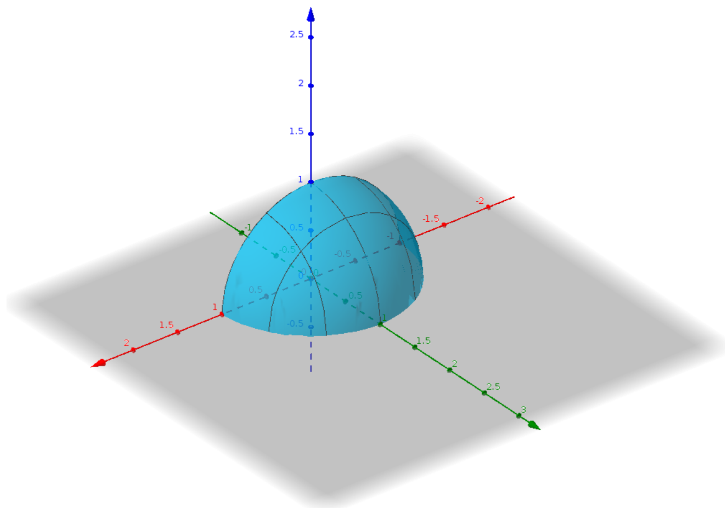
$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (0, \ x, \ -y)$ a M je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $0 \le y$, $0 \le z$ s horní orientací.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (x, \ y^2, \ yz)$ a M je na plášti kuželu $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ pro $0 \le z \le 1$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:
(i)



Plochu M zparametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi,\vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= \big(-\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= \big(\cos\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\vartheta\sin\varphi, \quad -\sin\vartheta \big) \end{aligned}$$

a odsud je

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \big(-\sin^2\vartheta\cos\varphi, \ -\sin^2\vartheta\sin\varphi, \ -\sin\vartheta\cos\vartheta \big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je záporná (na vnitřku definičního oboru), takže toto pole je orientované opačně k zadání. Takže máme

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(\varphi,\vartheta)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) dS \ =$$

$$= -\iint\limits_U (0, \sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot\begin{pmatrix} -\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} dS \ =$$

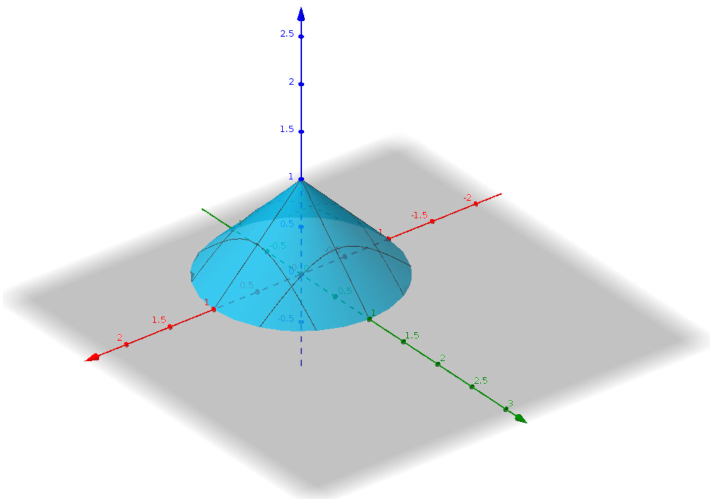
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\cdot(\sin\varphi\cos\varphi) - (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\cdot\sin\varphi \; d\vartheta \; d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta \; d\vartheta\right)\cdot\left(\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin(2\varphi)}{2}\; d\varphi}_{=0}\right) - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi \; d\varphi\right) =$$

$$= 0 - \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{3}\ .$$

- -

(ii) Plochu M je část kužele a je zadaná také jako graf funkce $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ pro $x^2+y^2 \le 1$.



Můžeme ji proto takto přirozeně zparametrizovat:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\ y,\ 1-\sqrt{x^2+y^2}\Big)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2+y^2 \le 1.$$

Všimněme si, že v bodě $(0,0)$ nemá tato funkce derivaci (je to vrchol kužele). Ale protože jde jen o jeden bod, nemá to vliv na integrál.

Dále máme

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)\\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)\end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1\Big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big)\cdot\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)\,dS \ = \iint\limits_U \big(x, y^2, y(1-\sqrt{x^2+y^2})\big)\cdot\left(\begin{array}{c}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 1\end{array}\right) dS \ =$$

$$= \iint\limits_U \frac{x^2+y^3-y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\ dS = \iint\limits_U \frac{x^2(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\ dS =$$

$$= \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0\le r\le 1 \\ \scriptstyle 0\le\varphi\le 2\pi\end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(r\cos^2\varphi(1-r\sin\varphi)+r\sin\varphi\Big)r\ dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi - r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + r^2 \sin \varphi \; dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi + \sin \varphi}{3} - \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{4} \; d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \left[\frac{\cos^3 \varphi}{12} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3} \; .$$

Poznámka: Ke zjištění hodnoty integrálu můžeme použít i Gaussovu větu (viz třeba příklad **14.12**), protože tok pole podstavou $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$ je v tomto případě nulový (neboť pole je rovnoběžné s podstavou).