13. cvičení z Matematické analýzy 2

15. - 19. ledna 2023

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, která je omezená, a nechť její hranice ∂E je tvořena uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$, co sama sebe nikde neprotíná (tzv. jednoduchá uzavřená křivka). Nechť orientace křivky $\mathcal{C}$ je taková, že při jejím procházení máme v daném místě oblast E vždy po levé straně.

Podle **Greenovy věty** pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{E} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru" v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry" pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír" na okraji oblasti.

Poznámka: Hranici E může být tvořena i z více uzavřených křivek, u kterých opět požadujeme, aby hranice ležela po jejich levé straně při procházení po směru dané křivky.

13.1 (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x,y) = (2xy^3,\ 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_{M} 2xy^2 \, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2 \, dy \, dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3} x^{10} \, dx = \frac{2}{33}.$$

13.2 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x}) \, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) \, dy$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení:

Naše oblast M je kruh o poloměru 3

$$M: \quad x^2 + y^2 \le 3^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(3y - e^{\sin x},\ 7x + \sqrt{y^4+1}\right) \ .$$

Orientace křivky $\mathcal{C}$ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát (s využitím znalosti obsahu kruhu)

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS = \iint\limits_{M} (7-3)\ dS = \iint\limits_{M} 4\ dS = 4\cdot\pi\cdot 3^2 = 36\pi \ .$$

Je vidět, že původní křivkový integrál bychom těžko počítali, ale s využitím Greenovy věty je výpočet snadný.

Gaussova věta

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV$$

dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj $M = \partial E$ oblasti E v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast E. Okraj ∂E má zde vždy vnější orientaci. Funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\vec{F}$ a interpretuje se jako "zdroj" pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok" pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole" v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

13.3 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete tok pole $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y^2,\ y+z)$ povrchem tělesa E ohraničeného plochami $x^2+y^2=4$, $z=x$ a $z=4$. Povrch má vnější orientaci.

Řešení:

Oblast E je vnitřek válce, který je shora omezen rovinou $z=4$ a zdola seříznut rovinou $z=x$.

Tedy

$$E:\quad x^2+y^2\le 4,\ x\le z\le 4$$

. Divergence pole je

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 1 + 2y + 1 = 2(1+y) \ .$$

Protože v Gaussově větě budeme integrovat přes E využijeme substituce přes válcové souřadnice:

$$\Phi:\ \begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

s oblastí parametrizace

$$U:\quad 0\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ r\cos\varphi\le h\le 4$$

kterou získáme snadno jednak z náčrtu (rozsah φ) a jednak dosazením substituce do nerovnic popisujících množinu R. Pro povrch $M=\partial E$ s vnější normálou pak máme z Gaussovy věty, že

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_{E} 2\,(1+y)\ dV = \iiint\limits_{U} 2\,(1+r\sin\varphi)\,r\ dh\ dr\ d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\int\limits_{r\cos\varphi}^{4} (r + r^2\sin\varphi)\ dh\ dr\ d\varphi = 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} \underbrace{(r+r^2\sin\varphi)(4-r\cos\varphi)}_{4r - r^2\cos\varphi + 4r^2\sin\varphi - r^3\cos\varphi\sin\varphi}\ dr\ d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\ dr\ d\varphi - 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos\varphi + 4r^2\sin\varphi - r^3\underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\frac{1}{2}\sin(2\varphi)}\ dr\ d\varphi =$$

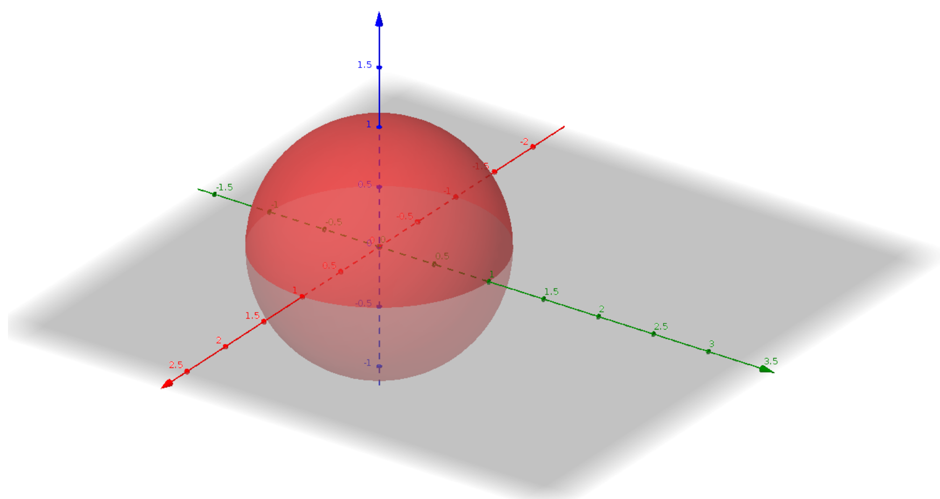
$$= \left(\int_0^{2\pi} 2\ d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^2 r^2\ dr\right) + 0 = 4\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{3}\pi.$$

Zde jsme využili nulovosti integrálu přes periodu funkcí $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ a $\sin(2\varphi)$.

13.4 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (x^3,\ y^3,\ z^3)$ a sférou $x^2+y^2+z^2=1$ s vnější orientací.

Řešení:



Máme

$$E:\quad x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

a

$$\partial E:\quad x^2+y^2+z^2 = 1\ .$$

Orientace okraje $M = \partial E$ je dána vnější normálou.

Máme

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = 3(x^2+y^2+z^2)$$

a Gaussova věta nám dává

$$\iint_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \mathrm{div}(\vec{F})\ dV = \iiint_E 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ dV = \left[\begin{array}{c} x=r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=r\cos\vartheta \\ (r,\varphi,\vartheta)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\cdot|r^2\sin\vartheta|\ dr\ d\varphi\ d\vartheta = \left(\int_0^1 3r^4\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\ d\vartheta\right) = \frac{3}{5}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

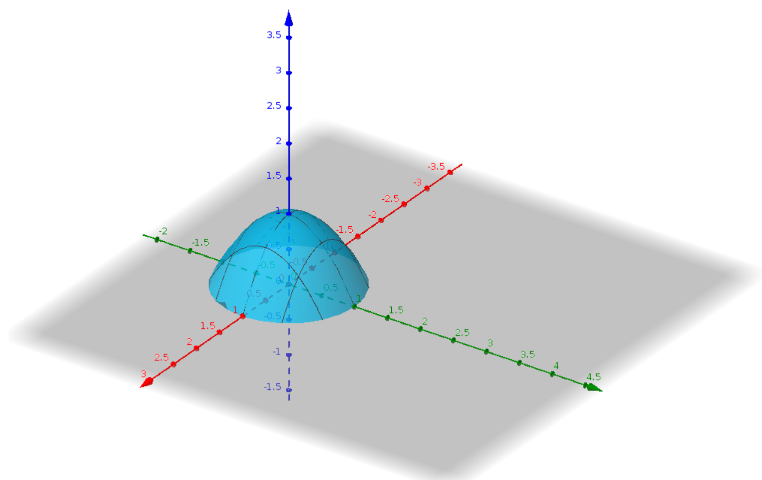
13.5 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:



Budeme postupovat podobně jako v příkladu **14.11**. Plocha M spolu s kruhem

$$K: \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \& \quad z = 0$$

(jehož orientace je směrem dolů) tvoří hranici ∂E (s vnější orientací) pro těleso

$$E: \quad 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\ .$$

Pole na kruhu K má tvar $\vec{F}(x,y,0) = (x,\ y,\ 0)$ a je tedy rovnoběžné z plochou kruhu. Proto je

$$\iint\limits_K \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0\ .$$

Tudíž díky Gaussově větě pak budeme mít:

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint\limits_K \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_E \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{=1+1+1=3}\ dV = \iiint\limits_E 3\ dV =$$

$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=h \\ \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq z\leq 1-r^2 \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} 3r\ dh\ dr\ d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r(1-r^2)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^1 (r - r^3)\ dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 3\ d\varphi\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) 6\pi = \frac{3}{2}\pi\ .$$