14. cvičení z Matematické analýzy 2

22. - 26. května 2023

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejímž okrajem je křivka $\mathcal{C}$, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}\ ,$$

kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right),\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

14.1 (Stokesova věta)

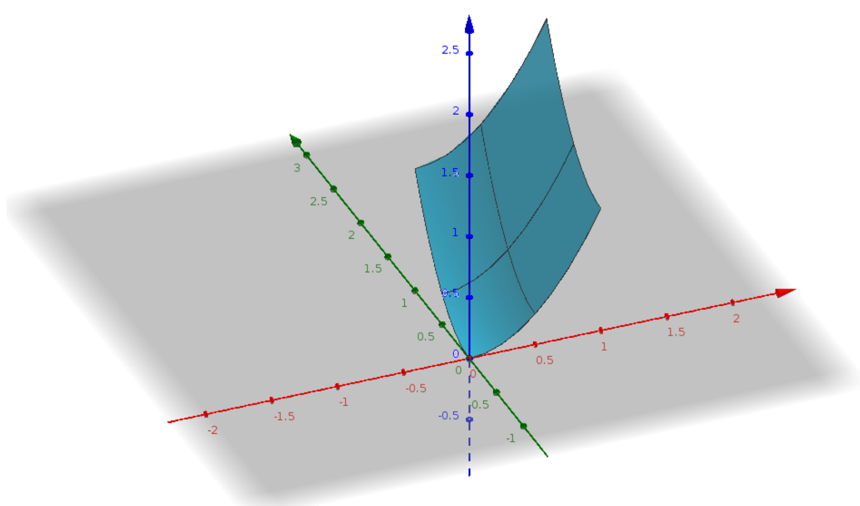
Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{C} \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je hranicí plochy $M:\quad z=x^2+y^2,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1$ a pole je $\vec{F}=(x,y,xy)$, Křivka $\mathcal{C}$ je orientována kladně při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení:

Abychom mohli použít Stokesovu větu, musíme si zvolit správnou orientaci příslušné plochy M tak, aby byla v souladu s orientací křivky $\mathcal{C}$, která tvoří její okraj.



Plocha M je grafem funkce $f(x,y)=x^2+y^2$, takže ji budeme orientovat směrem nahoru a přirozeněji zparametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y)=\Big(x,y,f(x,y)\Big)=(x,y,x^2+y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \;\; \& \;\; 0 \le y \le 1 \; .$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientaci plochy "nahoru." Rotace pole $\vec{F}$ je:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & xy \end{vmatrix} = \big(x, \; -y, \; 0\big) \; .$$

Máme tak

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \mathrm{rot}(\vec{F})(\Phi(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dS = \iint\limits_U (x, -y, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \big(2y^2 - 2x^2\big) \; dx \; dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2y^2 \; dx \; dy - \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2x^2 \; dy \; dx = 0 \; .$$

14.2 (Stokesova věta)

Spočítejte práci síly

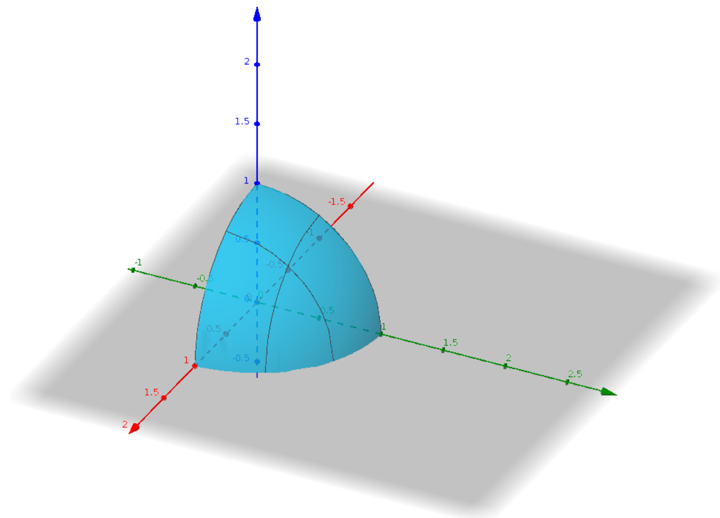
$$\vec{F}(x,y,z) = \Big((x+1)^x + z^2\Big)\vec{i} + \Big((y+1)^y + x^2\Big)\vec{j} + \Big((z+1)^z + y^2\Big)\vec{k}$$

vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu. Křivka $\mathcal{C}$ daná okrajem této plochy je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora (přesněji: ve směru daném posloupnosti bodů $(2,0,0) \to (0,0,2) \to (0,2,0)$).

Řešení:

Jak je vidět z tvaru vektorového pole, integrál odpovídající práci $\vec{F}$ síly podél uvedeného okraje $\mathcal{C}$ bychom přímým způsobem počítali asi těžko. Pomůžeme si proto Stokesovou větou, která integrál převede na tok pole $\mathrm{rot}(\vec{F})$ plochou

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x, y, z \ge 0 \; .$$



Tu musíme orientovat tak, aby její orientace byla v souladu se zvolenou orientací křivky $\mathcal{C}$. To lze uvidět např. z náčrtku a správná orientace plochy M je pak směrem *do počátku souřadnic* (tedy kdyby M byla celá sféra, byla by to ta orientace dovnitř). Rotace pole je

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+1)^x + z^2 & (y+1)^y + x^2 & (z+1)^z + y^2 \end{vmatrix} = (2y - 0,\ 2z - 0,\ 2x - 0)\ .$$

Dále budeme potřebovat plochu M zparametrizovat. K tomu bude nejvhodnější použít sférických souřadnic (pro $r = 2$). Parametrizace pak bude

$$\Phi: \quad \begin{aligned} x &= 2\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= 2\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= 2\cos\vartheta \end{aligned}$$

pro

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \tfrac{\pi}{2}\ .$$

Pro výpočet plošného integrálu budeme potřebovat ještě vektorový součin

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin\vartheta\sin\varphi & 2\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \\ 2\cos\vartheta\cos\varphi & 2\cos\vartheta\sin\varphi & -2\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= (-4\sin^2\vartheta\cos\varphi,\quad -4\sin^2\vartheta\sin\varphi,\quad -4\sin\vartheta\cos\vartheta)$$

který má zjevně tu správnou orientaci odpovídající orientaci plochy (tj. směrem *do počátku* souřadnic), protože znaménko z-tové složky je záporné pro body z vnitřku množiny U. Kdyby součin neměl požadovanou orientaci, vzali bychom ho s opačným znaménkem. Proto teď můžeme psát

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{M=\Phi(U)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_U \left(\operatorname{rot}(\vec{F}) \circ \Phi\right) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= \iint_U (4\sin\vartheta\sin\varphi,\quad 4\cos\vartheta,\quad 4\sin\vartheta\cos\varphi) \cdot \begin{pmatrix} -4\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -4\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -4\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= -16 \iint_U \sin^3\vartheta(\sin\varphi\cos\varphi) + (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\sin\varphi + (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\cos\varphi \; d\varphi \; d\vartheta =$$

$$= \left(-16 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta} \; d\vartheta\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi \; d\varphi\right) + \left(-16 \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi + \cos\varphi) \; d\varphi\right) =$$

$$= \Big[-16(-\cos\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos^3\vartheta)\Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\Big]_0^{\pi/2} + \Big[-\tfrac{16}{3}\sin^3\vartheta\Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big[-\cos\varphi + \sin\varphi\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left(-\frac{32}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{16}{3}\right) \cdot 2 = -16 \; .$$

- -

Ukážeme si ještě jeden výpočet pomocí standardní parametrizace plochy jako grafu funkce:

$$\Psi(x,y) = (x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$$

pro

$$V: \quad x^2 + y^2 \le 4 \quad \& \quad 0 \le x \quad \& \quad 0 \le y \; .$$

Vektorový součin

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} \times \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad 1\right)$$

má opačnou orientaci než je orientaci plochy. Musíme tedy při dosazení změnit znaménko. Proto máme

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{M=\Psi(V)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = -\iint_V \left(\operatorname{rot}(\vec{F}) \circ \Phi\right) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dx \; dy =$$

$$= -2 \iint_V (y, \quad \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} dx \; dy =$$

$$= -2 \iint_V \frac{xy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} + y + x \; dx \; dy = \{\textit{polární souř.}\} =$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left(\frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4 - r^2}} + r(\cos\varphi + \sin\varphi)\right) r dr \; d\varphi =$$

$$= \left(-2 \int_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}} \cdot r \; dr\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi \; d\varphi\right) + \left(-2 \int_0^2 r^2 \; dr\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi) \; d\varphi\right) =$$

$$= \left(-\frac{32}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{16}{3}\right) \cdot 2 = -16$$

kde jsme si spočítali

$$\int_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}} \cdot r \; dr = \left\{ \begin{array}{c} s = 4 - r^2 \\ ds = -2r \; dr \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int_4^0 \frac{4 - s}{\sqrt{s}} \; ds = \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{2} \; ds =$$

$$= \left[4\sqrt{s} - \frac{s^{3/2}}{3}\right]_0^4 = \frac{16}{3}\ .$$

14.3 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint\limits_M \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde

(a) $\vec{F} = \left(6yz,\ 5x,\ yze^{x^2}\right)$ a M je část paraboloidu $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ taková, že $0 \leq z \leq 4$ a její normálové pole má nezápornou třetí složku.

(b) $\vec{F} = (xyz, x, e^{xy}\cos z)$ a M je kužel $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ a $z \geq 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:

(a) Máme

$$M: \quad z = \frac{1}{4}x^2 + y^2 \ \ \&\ \ 0 \leq z \leq 4$$

s okrajem

$$\mathcal{C}: \ \ \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 4 \quad \& \quad z = 4$$

neboli

$$\mathcal{C}: \ \ \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad \& \quad z = 4\ .$$

Protože plocha M má orientaci směrem vzhůru, orientujeme její okraj $\mathcal{C}$ v kladném smyslu při pohledu shora (aby obě orientace byly v souladu).

Elipsa $\mathcal{C}$ má parametrizaci

$$\varphi(\alpha) = (x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha)) = (4\cos\alpha,\ 2\sin\alpha,\ 4), \qquad 0 \leq \alpha \leq 2\pi\ .$$

která odpovídá orientaci $\mathcal{C}$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (x'(\alpha),\ y'(\alpha),\ z'(\alpha)) = (-4\sin\alpha,\ 2\cos\alpha,\ 0)$$

a tok pole $\mathrm{rot}(\vec{F})$ plochou M je podle Stokesovy věty

$$\iint\limits_M \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(\alpha)) \cdot \varphi'(\alpha)\ d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (48\sin\alpha,\ 20\cos\alpha,\ 8\sin\alpha\ e^{16\cos^2\alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -4\sin\alpha \\ 2\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\ d\alpha = 8\int\limits_0^{2\pi} -24\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha\ d\alpha =$$

$$= 8(-24\pi + 5\pi) = -152\pi\ .$$

(b) Máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\ \ \&\ \ z \geq 0$$

a

$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2=1 \quad \& \quad z=0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru" a orientace jejího okraje $\mathcal{C}$ je tedy v kladném smyslu při pohledu shora a tedy odpovídá orientaci dané parametrizací

$$\varphi(\alpha)=(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0), \quad 0\le\alpha\le 2\pi\ .$$

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha)=(-\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ 0)$$

$$\iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}=\int\limits_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int\limits_0^{2\pi}(0,\cos\alpha,e^{\sin\alpha\cos\alpha})\cdot\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}\,d\alpha=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\alpha\ d\alpha=\pi.$$

Připomenutí: Pro mocninné řady budeme využívat toho, že na vnitřku oboru konvergence příslušné řady platí:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)'$
- $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}(x-x_0)^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}.$

Jestliže mocninná řada konverguje na některém kraji oboru konvergence, pak je součet řady v tomto kraji (jednostranně) spojitý.

Dále budeme používat známé rozvoje:

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ pro $|x|<1$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ pro $x\in\mathbb{R}$.

Pro řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ platí

(i) řada konverguje $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}<1 \quad\Rightarrow$ řada (absolutně) konverguje.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}>1 \quad\Rightarrow$ řada diverguje.

14.4 Vyšetřete konvergenci mocninné řady a nalezněte její součet.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^{2n+3}$$

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme podílové kritérium pro obecnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$: Pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+2}} x^{2n+5}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n+3}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{5} = \frac{x^2}{5}$$

Tedy řada konverguje pro $|x| < \sqrt{5}$ a diverguje pro $|x| > \sqrt{5}$, tudíž poloměr konvergence je $R = \sqrt{5}$. Pro $x = \pm\sqrt{5}$ máme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (\pm\sqrt{5})^{2n+3} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot (\pm\sqrt{5})$$

neexistuje. Tedy řada nekonverguje pro $x = \pm\sqrt{5}$.

Součet: Pro $|x| < \sqrt{5}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n+3} = \frac{x^3}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1) \cdot \frac{x^2}{5}\right)^n = \frac{x^3}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-x^2}{5}\right)} = \frac{x^3}{x^2 + 5}$$

kde jsme využili součet $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ pro $y = -\frac{x^2}{5}$, $|y| < 1$.

Poznámka: Opačným postupem můžeme zase zjistit rozvoj funkce $\frac{x^3}{x^2+5}$ v bodě $x_0 = 0$.

14.5 Vyšetřete konvergenci a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n \ .$$

Řešení:

Střed řady je $x_0 = -1$.

Poloměr konvergence: Využijeme podílové kritérium. Pro $x \neq -1$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1} (x+1)^{n+1}\right|}{\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n} (x+1)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{n}{n+1} \frac{\left|1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right|}{\left|1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right|} \cdot |x+1| = 3|x+1|$$

Tedy řada konverguje pro $3|x+1| < 1$ a diverguje pro $3|x+1| > 1$ a poloměr konvergence je proto $R = \frac{1}{3}$.

Pro $x + 1 = \frac{1}{3}$ máme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{div.} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n}_{konv.}$$

diverguje.

Pro $x+1=-\frac{1}{3}$ máme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}}_{konv.}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}_{konv.}$$

konverguje.

Součet: Řadu rozepíšeme pomocí součtu dvou řad. To můžeme udělat na společném oboru konvergence těchto řad. Pro $|x+1|<\frac{1}{3}$ platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\overbrace{3(x+1)}^{y_1}\big)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\overbrace{-2(x+1)}^{y_2}\big)^n}{n}$$

protože poloměr konvergence řad na právě straně je postupně $R_1=\frac{1}{3}$ a $R_2=\frac{1}{2}$. Pro sečtení využijeme toto:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{y^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}y^{n-1}=\frac{1}{1-y}\qquad\Rightarrow\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}=\int\frac{1}{1-y}\mathrm{d}y=-\ln(1-y)+C\ .$$

Pro $y=0$ dostaneme, že $0=-\ln(1)+C$, tedy $C=0$.

Takže po dosazení $y_1=3(x+1)$ a $y_2=-2(x+1)$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n=-\ln\big(1-3(x+1)\big)-\ln\big(1+2(x+1)\big)=$$

$$=-\ln\big(-2-3x\big)-\ln\big(3+2x\big)$$

pro $|x+1|<\frac{1}{3}$. Tato rovnost platí ještě na kraji, kde řada konverguje (protože je zde spojitá). Tedy rovnost platí pro $x\in\langle-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$.

14.6 Vyšetřete konvergenci mocninné řady a nalezněte její součet.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n n!}(x-2)^n$$

Řešení:

Střed řady je $x_0=2$.

Poloměr konvergence: Využijeme podílové kritérium. Pro $x\neq 2$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+2)(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}\right|\cdot\left|\frac{3^n n!}{(-1)^n(n+1)(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot|x-2|}{3(n+1)^2}=0<1$$

Řada tedy konverguje pro všechna $x\in\mathbb{R}$, takže poloměr konvergence je $R=+\infty$.

Součet: Řadu si upravíme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n n!}(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\left(-\frac{x-2}{3}\right)^n$$

Teď stačí jen sečíst řadu $f(y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}y^n$ (která má také poloměr konvergence $R=+\infty$) a dosadit $y=\frac{2-x}{3}$. Z věty o derivování řad a využitím rozvoje e^y máme

$$f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}y^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{n!}\right)'=\left(y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)'=(ye^y)'=e^y+ye^y=(1+y)e^y\ .$$

Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n n!}(x-2)^n=f\left(\tfrac{2-x}{3}\right)=\tfrac{5-x}{3}\cdot e^{\frac{2-x}{3}}$$

pro všechna $x\in\mathbb{R}$.

14.7 Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+\frac{1}{3}\right)x^{2n-1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Podle podílového kritéria je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left(2n+2+\frac{1}{3}\right)x^{2n+1}\right|}{\left|\left(2n+\frac{1}{3}\right)x^{2n-1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{7}{3}}{2n+\frac{1}{3}}\,x^2=x^2$$

Tedy řada konverguje pro $|x|^2<1$ a diverguje pro $|x|^2>1$, tudíž poloměr konvergence je nutně $R=1$. Pro $x=\pm1$ máme, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{3}\right)(-1)^{2n-1}\neq 0\ .$$

Tedy řada nekonverguje pro $x=\pm1$.

Součet: Pro $0<|x|<1$ si řadu rozdělíme na součet řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+\frac{1}{3}\right)x^{2n-1}=2x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n(x^2)^{n-1}+\frac{1}{3x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^n.$$

Teď už jen sečteme rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y^n$, kde pak dosadíme $y:=x^2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}y^n=\frac{1}{1-y}-1=\frac{y}{1-y}\qquad\text{a}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^n\right)'=\left(\frac{1}{1-y}-1\right)'=\frac{1}{(1-y)^2}$$

Takže po dosazení $y:=x^2$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+\frac{1}{3}\right)x^{2n-1}=\cdots=2x\cdot\frac{1}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{3x}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{2x}{(1-x^2)^2}+\frac{x}{3(1-x^2)}$$

pro $|x|<1$.

14.8 Vyšetřete konvergenci mocninné řady a nalezněte její součet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n$$

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme podílové kritérium. Pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)^2-1}{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{n^2-1}{n} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-1}{n^2-1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x|$$

Tedy řada konverguje pro $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$, tudíž poloměr konvergence je $R = 1$.

Pro $x = \pm 1$ není splněna nutná podmínka konvergence řady (tedy, že limita sčítanců musí být nula), takže zde řada diverguje.

Součet: Řadu rozepíšeme pomocí součtu dvou řad, obě mají poloměr konvergence 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n - \frac{1}{n} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Pro součet první řady použijeme známou geometrickou řadu a její derivování:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

A pro součet druhé řady uděláme podobnou věc, jen obráceně:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x = -\ln(1-x) + C \ .$$

Pro $x = 0$ dostaneme, že $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$.

Takže po dosazení dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n = \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} + \ln(1-x) \ .$$

14.9 Vyšetřete konvergenci mocninné řady a nalezněte její součet.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$$

Řešení:

Střed řady je $x_0 = 1$. Vzpomeneme si na vztah $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$ a pro $y = x - 1 \neq 0$ si řadu přepíšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)!} = \frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{e^y - 1 - y}{y^2} \ .$$

Tento vztah platí pro všechna $y \neq 0$ a proto původní řada v proměnné x konverguje všude, tedy poloměr konvergence je $R = +\infty$. Pro $y = 0$ rovnost platí také ve smyslu limity pravé strany.

Celkem tedy máme, že

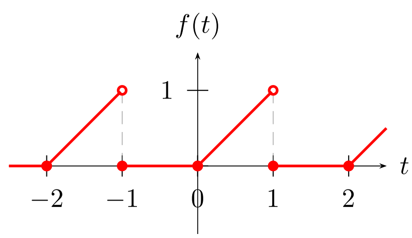
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!} = \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$$

platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (pro $x = 1$ ve smyslu limity výrazu na pravé straně).

14.10 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} t & , \ t \in [0,1), \\ 0 & , \ t \in [1,2). \end{cases}$$

(tj. funkci s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:

Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$.

$$a_0 = \tfrac{2}{2} \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t\cos(k\pi t)\,dt = \underbrace{\left[t \cdot \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int_0^1 \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \left[\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2}$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int\limits_0^1 t\sin(k\pi t)\,dt = -\left[t\cdot\frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} + \int\limits_0^1 \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \underbrace{\left[\frac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

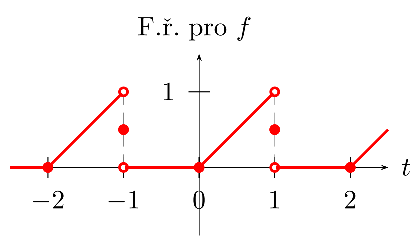
Takže

$$f \sim \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi t) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(k\pi t)$$

a podle Jordanova kritéria je

$$\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi t) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(k\pi t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,t\in 2\mathbb{Z}+1 \\ f(t) & ,t\in\mathbb{R}\setminus(2\mathbb{Z}+1) \end{cases}.$$

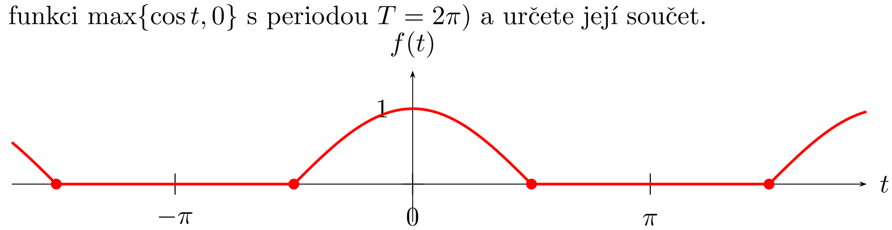
s grafem



14.11 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & ,\ t\in\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & ,\ t\in\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

(neboli funkci $\max\{\cos t, 0\}$ s periodou $T = 2\pi$) a určete její součet.



Řešení:

Perioda naší funkce je $T = 2\pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ a $\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$. Funkce f je sudá. Proto $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a dále ze sudosti f máme pro zbyle koeficienty Fourierovy řady funkce f, ze:

$$a_0 = 2\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\,dt = 2\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{2}{\pi}\Big[\sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_k = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \big(\cos(k+1)t + \cos(k-1)t\big)\,dt =$$

$$= \{\text{dále platí pro } k \geq 2\} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k-1)t}{k-1}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , k \text{ liché} \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right) = -\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} & , k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

protože

$$\sin\Big((2n+1)\tfrac{\pi}{2}\Big) = (-1)^n \text{ pro } n \in \mathbb{Z}\ .$$

Pro $k = 1$ máme

$$a_1 = \cdots = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \big(\cos 2t + 1\big)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{2}\ .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nt$$

($a_k = 0$ pro lichá k a pro sudá jsme to přepsali pomocí $k = 2n$)

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nt$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

a tedy

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big)\ .$$