3. cvičení z Matematické analýzy 2

6. - 10. března 2023

3.1 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^2+y^2}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^3+y^3}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y}$ je

$$D(f): \quad xy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Bod $a_0 := (4,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Protože nás zajímá $(x,y) \to (4,0)$, tak hodnoty x v nějakém okolí bodu $(4,0)$ jsou nenulové. Proto (pro body z $D(f)$ v nějakém okolí a_0) můžeme psát

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y} = \frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy} \cdot x$$

což jsme takto udělali proto, abychom mohli vyšetřit $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy}}_{=F(x,y)}$ pomocí věty o limitě složené funkce. Ta nám říká, že pokud

- $F(x,y) = h(g(x,y))$, kde $g(x,y) = xy$ a $h(z) = \frac{\mathrm{tg}(z)}{z}$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} xy = 0$ $(=: b_0)$ (neboť g je součin spojitých funkcí)
- $\lim\limits_{z\to b_0} h(z) = \lim\limits_{z\to 0} \underbrace{\frac{\sin(z)}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(z)}}_{\to 1} = 1$ $(=: c)$
- a pokud (pro korektní použití) máme ještě zajištěno,
  - že buď v prstencovém okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (4,0)$ je $g(a) \neq b_0$ pro $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ (což snadno zajistíme tím, že omezíme definiční obor funkce g z celého $\mathbb{R}^2$ jen na $D(g): y \neq 0$, a i potom stále ještě budeme mít $D(g) \supseteq D(F)$)
  - nebo že funkce h je spojitá v $b_0 = 0$ (což zajistíme tím, že funkci h spojitě dodefinujeme v $b_0 = 0$).

pak $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} F(x,y) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy} = 1$$

a tudíž

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\frac{\mathrm{tg}(xy)}{xy}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 4} = 4\ .$$

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^4 y}{x^2+y^2}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm 2, funkce v čitateli je zase polynom se stupněm 3, který by měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je a to (opět) pomocí odhadu:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \big|f(x,y) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|x|^4 \cdot |y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5}{x^2+y^2} = (\sqrt{x^2+y^2})^3$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \quad \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y) - c\big| \quad \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x^2+y^2})^3 \ = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2})^3$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme ještě použít odhad pomocí polárních souřadnic (který ale vlastně nepřináší v tomto případě nic nového): body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq \big|f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|\varrho\sin\varphi|^4 \cdot |\varrho\cos\varphi|}{\varrho^2} = \varrho^3 \cdot \underbrace{|\sin\varphi|^4}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\cos\varphi|}_{\leq 1} \leq \varrho =: g(\varrho)$$

Nyní, protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = 0$ vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

- -

(c) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^4 y}{x^3+y^3}$ je

$$D(f): \quad y \neq -x\ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f snadno vidíme, že na přímce $y = -x$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^4 y$ a $g(x,y) = x^3 + y^3$ jsou spojité funkce
- položme $M: \; y = -x \; \wedge \; (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0,0)$. Takže dostaneme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^5}{x^3 + k^3 x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{1+k^3} = 0 \; .$$

Proto ani "nekonečná" limita neexistuje.

Celkově máme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^3+y^3}$ neexistuje.

3.2 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2+y^2}{|x-1|+y}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{(x-1)^2+y^2}{|x-1|+y}$ je

$$D(f): \quad y \neq -|x-1|$$

což znamená, že z roviny musíme vyjmout graf funkce ve tvaru absolutní hodnoty. Bod $(1,0)$ je evidentně hromadným bodem $D(f)$. V limitě se čitatel i jmenovatel blíží k nule. Můžeme zkusit přiblížení po přímkách procházejících tímto bodem, které budou tvaru $y = k(x-1)$, kde $k \neq \pm 1$. Zjistíme, že všechny dávají limitu 0.

Přesto ale (konečná) limita *neexistuje*. K tomu stačí použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ a $g(x,y) = |x-1| + y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \; y = -|x-1| \; \wedge \; (x,y) \neq (1,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (1,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

A protože už z alespoň jednoho přiblížení máme hodnotu 0, tak ani případná “nekonečná” limita nemůže existovat.

- -

(b) Pro funkci $f(x,y) = \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Zkusíme si přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \left\{ \begin{matrix} \textit{substituce} \\ s = \frac{1}{x^2} \end{matrix} \right\} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s^2}{e^s} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{s\to+\infty} \frac{2s}{e^s} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{s\to+\infty} \frac{2}{e^s} = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Ze zkušenosti s limitami můžeme už tušit, že limita bude existovat. Odhad by zde bylo obtížné použít, zkusíme proto polární souřadnice:

Body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \le |f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - c| = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}}}{\varrho^4}$$

Nyní bychom chtěli tento výraz odhadnout nějakou funkcí $g(\varrho)$ nezávisející na úhlu, která pro ϱ jdoucí k nule má limitu nula. Potřebujeme tedy omezit hodnotu $\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$ konstantou. Protože funkce $h(\varphi) = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi$ je spojitá a kladná na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, tak zde také nabývá svého kladného minima ε v nějakém bodě $\varphi_0 \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Tedy $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi \ge \varepsilon > 0$. A proto je $\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} \le \frac{1}{\varepsilon}$ a my máme odhad

$$0 \le |f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - c| = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}}}{\varrho^4} \le \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}}}{\varrho^4} =: g(\varrho)$$

A protože (jak už jsme spočítali) $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = \lim\limits_{\varrho\to 0_+} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}}}{\varrho^4} = 0$ (viz výše) vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = c = 0\ .$$

- -

Proč je potřeba dělat při použití polárních souřadnic odhad nezávislý na úhlu:

Vezmeme si např. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$

Při přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme jako limitu 0, při přiblížení po parabole $x = y^2$ dostaneme jako limitu hodnotu 1. Celková limita tedy neexistuje.

Při použití polárních souřadnic a limitě $\varrho \to 0$ při pevné hodnotě φ máme $\lim\limits_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi}{\varrho\sin\varphi} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} = 0$. Tyto limity ale odpovídají jen přiblížení po polopřímkách. přestože všechny vycházejí stejně, limita neexistuje (jak už víme výše). Kromě toho funkce $\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$ není omezená na množině $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$.

Připomenutí:
Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace podle vektoru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

Neboli: Definiční obor $D(f)$ “projíždíme” po přímce $\varphi(t) = a_0 + t\vec{h}$, kde t představuje čas a $\vec{h}$ tím pádem vektor rychlosti pohybu po dané přímce. A ptáme se, jak se rychle se přitom budou měnit hodnoty funkce f při průchodu bodem a_0. Je zřejmé, že čím větší bude rychlost průchodu $\vec{h}$, tím rychlejší budou i změny hodnot funkce f.

Speciálně definujeme tzv. *parciální derivaci podle i-té proměnné* (dejme tomu, že se bude jmenovat x_i) jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a_0)$$

kde $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{tá pozice}}, 0, \ldots, 0)$ je vektor standardní báze.

Konkrétně pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

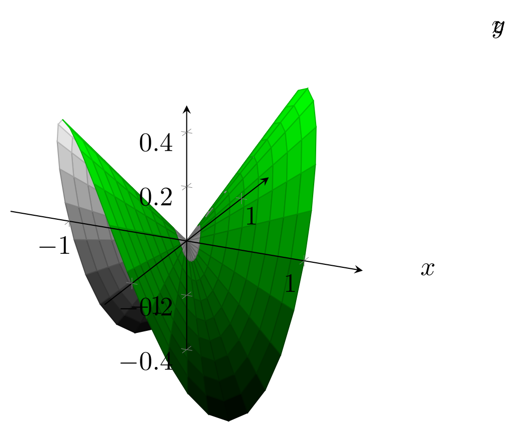
tedy funkci f stačí ”obyčejně” derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu.

3.3 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0)\ . \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení:
Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(a) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - yx^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pro bod $a = (0, 0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0\ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0, 0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \begin{cases} 1, & \text{pro } y > 0, \\ -1, & \text{pro } y < 0\ . \end{cases}$$

Tedy nejenže $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ není rovna 0 (což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$), ale dokonce tato limita vůbec neexistuje. Tedy ani limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

neexistuje a funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v bodě $(0, 0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Důležitá poznámka: Hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ nelze obecně počítat jako $\lim\limits_{a\to a_0}\frac{\partial f}{\partial x}(a)$! Často ale ano, a to ovšem právě tehdy, jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá v bodě a_0.

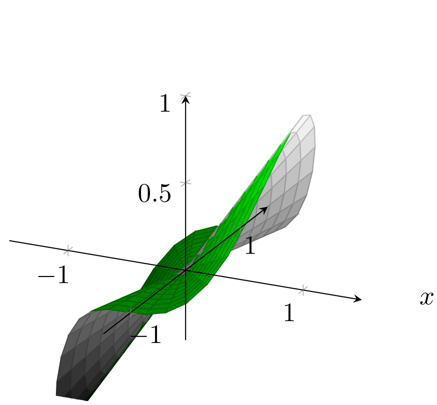
3.4 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení:

Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)(a) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Pro bod $a = (0, 0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2+0} - 0}{t} = 1 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0, 0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \ .$$

Tedy limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

nemůže být rovna 1, což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, a tedy funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ *není spojitá v bodě* $(0, 0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

3.5 Určete parciální derivace (1. řádu) funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

Řešení:

Definiční obor $D(f):\ y \neq 0$ je otevřená množina. V každém bodě $(x, y) \in D$ máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{y^{-1}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$