4. cvičení z Matematické analýzy 2

13. - 17. března 2023

Připomenutí: *Derivace (totální diferenciál)* funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $df(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a
$$g(a) := f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$
klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.
$$\lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = \lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a)-f(a_0)-df(a_0)[a-a_0]}{\|a-a_0\|} = 0 \ .$$

Funkce g se nazývá *linearizací* funkce f v bodě a_0.

Také to můžeme říct tak, že existuje $\varepsilon > 0$ a funkce ω definovaná na ε-okolí počátku souřadnic $\vec{0}$ taková, že
$$\lim_{\vec{u} \to \vec{0}} \omega(\vec{u}) = 0$$
a platí, že
$$f(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + df(a_0)[\vec{h}] + \|\vec{h}\| \cdot \omega(\vec{h})$$
pro každý vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\|\vec{h}\| < \varepsilon$.

Poznámka:

- Pokud existuje derivace $df(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] \ .$$
Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazeni $df(a_0)$ ve standardní bázi má tvar
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \ , \ldots , \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \right) \ .$$
(Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení a jeho matici ve standardní bázi.)

  POZOR: Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $df(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

Definice: Nechť existuje $df(a_0)$. *Gradient funkce* f v bodě a_0 je takový vektor $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^n$, že pro každé $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je
$$df(a_0)[\vec{h}] = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}$$
(kde $\cdot$ je standardní skalární součin). Tedy ve standardní bázi máme
$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je *směrem nulového růstu* funkce f v bodě a_0 právě když $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = 0$ (a vektor $\vec{v}$ je směr, tj. $\|\vec{v}\| = 1$.)

Poznámka: Nechť pro funkci $f(x, y)$ existuje $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^3$ v bodě $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak vektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$ leží ve vektorovém prostoru příslušnému tečné rovině v bodě a_0 právě když je

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = 0 \ ,$$

kde $(\mathrm{grad} f(a_0), -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right)$

Je to proto, ze rovnice tečné roviny má tvar $z = f(a_0) + \mathrm{grad} f(a_0)[a - a_0]$ neboli

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(a_0) \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Neboli $(\mathrm{grad} f(a_0), -1)$ je normálový vektor tečné roviny (a jejího přidruženého vektorového prostoru).

Nechť je nyní $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Nechť $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ představuje vektor z jeho prvních dvou souřadnic (neboli $\vec{u}$ je projekce $\vec{U}$ do základny). Pak $\vec{U}$ leží v tečné rovině právě když

$$0 = (\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + \beta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) + \gamma \cdot (-1) = df(a_0)[\vec{u}] - \gamma = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) - \gamma$$

neboli když

$$\gamma = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0), \quad \text{pro} \quad \vec{u} = (\alpha, \beta)$$

tudíž vektor $\vec{U}$ je prostě tvaru

$$\vec{U} = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right) \ .$$

Současně si všimněme, že úhel $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, který svírá vektor $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right)$ se základnou je dán jako

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{df(a_0)[\vec{u}]}{\|\vec{u}\|} \ .$$

4.1 Pro funkci $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $a_0 = (2, 2)$ určete derivaci (tj. totální diferenciál), tečnou rovinu, derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a směr nulového růstu.

Má graf funkce větší strmost, jestliže se vydáme ve směru určeném vektorem $\vec{w} = (0, 5)$ nebo ve směru určeném vektorem $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

Řešení:

Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \cos(x - y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \cos(x - y) \ .$$

Z jejich spojitosti v okolí bodu $a_0 = (x_0, y_0) = (2, 2)$ (spojité jsou dokonce všude na $\mathbb{R}^2$) vidíme, že derivace $df(a_0)$ skutečně existuje. Máme tedy

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \Big(y + \cos(x - y),\ x - \cos(x - y)\Big)(a_0) = (3, 1)$$

a tudíž diferenciál je

$$df(a_0)[\vec{h}] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 3h_1 + h_2 \ .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= 4 + 3(x-2) + y - 2$$

neboli

$$3x + y - z = 4.$$

Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}.$$

Pro oba vektory $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ a $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ najdeme jejich odpovídající protějšky $\vec{U} = (\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)) \in \mathbb{R}^3$ a $\vec{W} = (\vec{w}, \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(a_0)) \in \mathbb{R}^3$ v tečné rovině (viz poznámka výše). Strmost tečné roviny ve směru určeném vektorem $\vec{u}$ je pak určena úhlem, který svírá vektor $\vec{U}$ s vodorovnou rovinou (tj. rovinou $z = 0$). A podobně pro $\vec{w}$.

Úhel φ vektoru $\vec{U}$ je podle poznámky určen jako

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}\ .$$

Úhel ψ vektoru $\vec{W}$ je podle poznámky určen jako

$$\mathrm{tg}(\psi) = \frac{1}{\|\vec{w}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(a_0) = \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 5}{\sqrt{0^2 + 5^2}} = 1\ .$$

Protože $\sqrt{2} > 1$, tak větší strmost je ve směru vektoru $\vec{u}$.

Stejnou věc zjistíme také tak, že určíme jestli úhel α, který svírají $\vec{u}$ a $\mathrm{grad} f(a_0)$ je menší nebo větší než úhel β, který svírají $\vec{w}$ a $\mathrm{grad} f(a_0)$. Tedy menší úhel odpovídá vyššímu růstu funkce f a tedy větší strmosti. V tomto případě porovnáváme kosiny úhlu:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \mathrm{grad} f(a_0)}{\|\vec{u}\| \cdot \|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}/2 + 1 \cdot \sqrt{2}/2}{1 \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ .$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{w} \cdot \mathrm{grad} f(a_0)}{\|\vec{w}\| \cdot \|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 5}{\sqrt{0^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\ .$$

Protože $\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{10}}$, tak menší úhel je α tedy opět jsme zjistili, že větší strmost ve směru vektoru $\vec{u}$.

4.2 Pro funkci $f(x, y) = \ln(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete totální diferenciál, tečnou rovinu a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Určete směr největšího růstu, nejmenšího růstu (= největšího poklesu) a směr nulového růstu.

Určete úhel, který svírá tečná rovina se základnou (tj. s rovinou $z = 0$).

Řešení:

Budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.1**.

Pro $a_0 = (1, 1)$ máme

$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y^2}{xy^2}, \frac{2xy}{xy^2}\right)(a_0) = (1, 2)\ .$$

Existence $\mathrm{grad} f(a_0)$ plyne ze spojitosti parciálních derivací v obecném bodě.

Tečná rovina je graf linearizace funkce f v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$. Má tedy rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\binom{x-x_0}{y-y_0} = 0 + (1,\ 2)\binom{x-1}{y-1} = x - 1 + 2(y-1)$$

což se dá přepsat také jako

$$x + 2y - z = 3\ .$$

Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\mathrm{grad} f(a_0) = (1, 2)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$).

Směrem nejmenšího růstu je směr opačný ke gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(2, -1)$ a $(-2, 1)$, konkrétní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{a} \quad \vec{w}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\ .$$

Úhel mezi rovinami ϱ_1 a ϱ_2 je určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||}\ .$$

Normálový vektor tečné roviny je

$$\vec{n}_1 = (\mathrm{grad} f(a_0), -1) = (1, 2, -1)$$

normálový vektor základny je

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1)\ .$$

Tedy

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

a hledaný úhel je

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \doteq 65.91^\circ\ .$$

Věta: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$$

což je zřejmě vrstevnice funkce Φ.

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M implicitně definovaná (regulární) plocha. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poznámka: Každý graf spojitě diferencovatelné funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$, můžeme přirozeně chápat jako implicitně definovanou (regulární) plochu pomocí funkce $\Phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x, y, z) := f(x, y) - z$$

protože

$$GRAF\ (f) = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid \ z = f(x, y)\ \} = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid \ \Phi(x, y, z) = 0\ \}$$

Současně vidíme, že normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A_0 = \big(a_0, f(a_0)\big)$ pro $a_0 \in G$ je

$$\mathrm{grad}\Phi(A_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial z}(A_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right) \neq \vec{0}$$

tedy je nenulový.

4.3 (úhly mezi plochami)

Nalezněte úhel, který svírají

(a) graf funkce $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ a plocha $M : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$ v bodě $(1, 0, ?)$.

(b) graf funkce $f(x, y) = e^{\sin xy}$ a plocha $M : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 = 7$ v bodě $(0, 2, ?)$.

Řešení:

Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \ .$$

(a) Třetí souřadnice bodu $A = (1, 0, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(1, 0) = \ln(1) = 0$. Tedy jde o bod $A = (1, 0, 0)$. Je dobře ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = f(x, y) - z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - z \ .$$

Plocha M je zadaná implicitně funkcí

$$\Phi_2(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 2 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1, 0, 0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \mathrm{grad}\ \Phi_1(A) = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2},\ -1\right)_{|A} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \mathrm{grad}\ \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ 2(y+1),\ 2(z+1)\Big)_{|A} = (0, 2, 2)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||\cdot||\vec{n}_2||} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Třetí souřadnice bodu $A = (0, 2, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(0, 2) = e^{\sin 0} = 1$. Tedy jde o bod $A = (0, 2, 1)$. Je dobré ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = e^{\sin(xy)} - z \ .$$

Plocha M je zadána implicitně funkcí

$$\Phi_2(x,y,z) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 - 7 \; .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (0,2,1)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)},\; x\cos(xy)e^{\sin(xy)},\; -1\Big)_{|A} = (2,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\; y,\; 2(z-3)\Big)_{|A} = (-2,2,-4)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a plochy jsou vzájemně kolmé.

Připomenutí: Derivace zobrazení s více složkami se definuje analogicky jako pro reálnou (jednosložkovou) funkci. Tedy:

Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. *Derivace* zobrazení $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ ve bodě $a_0 \in U$ je takové lineární zobrazení (označené jako $\mathrm{d}\Phi(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$), které je nejlepší aproximací zobrazení Φ v bodě a_0 v tomto smyslu:

$$\lim_{a \to a_0} \frac{\|\, \Phi(a) - \Phi(a_0) - \mathrm{d}\Phi(a_0)[a - a_0] \,\|}{\|a - a_0\|} = 0$$

kde jsme v čitateli výrazu použili normu (v $\mathbb{R}^m$), což je ekvivalentní tomu, že výše uvedená limita platí v každé složce výrazů v čitateli. Upřesněme, co se tím myslí:

Nechť jednotlivé složky zobrazení jsou funkce $f_i : U \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, m$, tedy

$$\Phi(a) = \big(f_1(a), \ldots, f_m(a)\big) \quad \text{pro} \quad a \in U$$

pak výše uvedená limita platí právě když

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f_i(a) - f_i(a_0) - \Big(\mathrm{d}\Phi(a_0)[a - a_0]\Big)_i}{\|a - a_0\|} = 0 \qquad \text{pro} \qquad i = 1, \ldots, m$$

kde $\Big(\mathrm{d}\Phi(a_0)[a - a_0]\Big)_i$ je i-tá složka vektoru $\mathrm{d}\Phi(a_0)[a - a_0]$.

Existence derivace: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\Phi = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je takové zobrazení, že všechny složky $f_i : U \to \mathbb{R}^m$ jsou spojitě diferencovatelné (říkáme pak, že Φ je spojitě diferencovatelné, neboli třídy C^1). Pak pro $a \in U$ existuje derivace $\mathrm{d}\Phi(a)$ a její matice (ve standardní bázi) typu $m \times n$ se nazývá Jacobiho matice

$$J_\Phi(a) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} .$$

4.4 Nalezněte Jacobiho matici a diferenciál zobrazení Φ v bodě a, jestliže

(a) $\Phi(x,y,z) = (xyz, x^2 z)$, $a = (1,-2,1)$;

(b) $\Phi(x,y) = (ye^x, x^3 - y, 2x + 1)$, $a = (0,1)$.

Řešení:
(a)

$$J_\Phi(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(xyz)}{\partial x} & \frac{\partial(xyz)}{\partial y} & \frac{\partial(xyz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(x^2z)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2z)}{\partial y} & \frac{\partial(x^2z)}{\partial z} \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$d\Phi(a)[\vec{h}] = J_\Phi(a)\vec{h} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h_1 + h_2 - 2h_3 \\ 2h_1 + h_3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$J_\Phi(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(ye^x)}{\partial x} & \frac{\partial(ye^x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x^3-y)}{\partial x} & \frac{\partial(x^3-y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(2x+1)}{\partial x} & \frac{\partial(2x+1)}{\partial y} \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} ye^x & y \\ 3x^2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d\Phi(a)[\vec{h}] = J_\Phi(a)\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ -h_2 \\ 2h_1 \end{pmatrix}$$

Derivace složeného zobrazení: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny (v příslušných prostorech). A mějme zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\Phi} & V & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

se složkami $\Phi = (f_1, \ldots, f_m)$.

Jestliže existuje derivace $\mathrm{d}\Phi(a)$ v bodě $a \in U$ a derivace $\mathrm{d}g(b)$ v bodě $b = \Phi(a) \in V$, pak existuje derivace $\mathrm{d}\Big(g \circ \Phi\Big)(a)$ a platí:

$$\mathrm{d}\Big(g \circ \Phi\Big)(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}\Phi(a) = \mathrm{d}g\Big(\Phi(a)\Big) \circ \mathrm{d}\Phi(a)$$

a maticově zapsáno je to:

$$\left(\frac{\partial\Big(g \circ \Phi\Big)}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial\Big(g \circ \Phi\Big)}{\partial x_n}(a) \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Konkrétně, pro

$$(g \circ \Phi)(x_1, \ldots, x_n) = g\Big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

z tohoto vyplývá tzv. řetězové pravidlo (což je jen přepis maticového násobení) a to ve tvaru

$$\frac{\partial(g \circ \Phi)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

Poznámka: Někdy potřebujeme vyjádřit nějaký výraz (případně rovnici) v jiných souřadnicích. Co se tím přesně myslí:

Představme si to tak, že v $\mathbb{R}^2$ "žije" funkce f (tj. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Prostor $\mathbb{R}^2$ (nebo jeho část) můžeme ale popisovat také pomocí jiných (křivočarých) souřadnic $\Phi : G \to \mathbb{R}^2$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je vhodná množina. Je to podobné, jako když nějaké území na Zemi zachycujeme na různých mapách. A stejně jako nějaká oblast na Zemi vypadá na různých mapách vždy trochu jinak, stejně tak se funkce f vyjádřená pomocí souřadnicového popisu Φ bude také pokaždé jevit jinak (půjde totiž o funkci $f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$). Jak je vidět, i přes složení funkce f se zobrazením Φ, jde vlastně pořád o tentýž "objekt", tj. tutéž "funkci" na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Pokud nyní funkci

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

přiřadíme např. následující odvozenou funkci

$$\widetilde{f} := x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

(popsanou kartézskými souřadnicemi), pak chceme vědět, jak bude vypadat odpovídající přiřazení pomocí transformace Φ, kdy funkci

$$F := f \circ \Phi : \quad G \to \mathbb{R}$$

přiřazujeme odpovídající funkci

$$\widetilde{F} = \widetilde{f} \circ \Phi = \left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} \right) \circ \Phi : \quad G \to \mathbb{R} \ .$$

Posledně zmíněnou funkci $\widetilde{F}$ ovšem chceme vyjádřit pomocí derivací funkce F podle nových souřadnic (podobně jako $\widetilde{f}$ byla vyjádřena pomocí parciálních derivací funkce f).

Doplnění: Transformace souřadnic je bijektivní zobrazení. Pro *diferencovatelnou* transformaci, pak požadujeme, aby definiční obor i obor hodnot byly obě otevřené množiny a inverzní zobrazení bylo také diferencovatelné.

4.5 Transformujte výraz $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$ pomocí polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} \Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \quad &\to \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\} \\ (r, \varphi) \quad &\mapsto \quad (x, y) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \ . \end{aligned}$$

Řešení:

Potřebujeme vyjádřit hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pomocí hodnot a $\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi)$ a $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi)$, kde $(x,y) = \Phi(r,\varphi)$ a $F(r,\varphi) = f(x,y)$.

Vezmeme si tedy rovnost

$$F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

a použijeme na ní $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial r}$ čímž podle řetězového pravidla dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} = \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Řetězové pravidlo je jen důsledek toho, jak se derivuje složené zobrazení: Ze vztahu

$$F = f \circ \Phi$$

(a diferencovatelnosti zobrazení f a Φ) plyne, že v bodě $\alpha = (r,\varphi)$ bude

$$F'(\alpha) = f'(\Phi(\alpha)) \circ \Phi'(\alpha)$$

(což je složení lineárních zobrazení) neboli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Odsud vypočítáme např. invertováním matice

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

nebo analogicky vynásobením rovnic tak, abychom získali výraz $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\varphi \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\varphi \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\sin\varphi \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}$$