5. cvičení z Matematické analýzy 2

20. - 24. března 2023

5.1 Nechť $f = f(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Najděte (obecně) derivaci funkce $g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ pro $0 < \varphi < 2\pi$ a $r > 0$.

Řešení:
Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} =$$

$$= \cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial \varphi} =$$

$$= -r\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Budeme vyšetřovat extrémy funkcí. Nejdříve to budou *lokální* extrémy funkce f na *otevřené* množině U.

Postup při hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U bude tento:

- najdeme body $a \in U$, kde je $\mathrm{d}f(a) = (0,\dots,0)$) (nutná podmínka);
- dále pak vyšetříme definitnost $\mathrm{d}^2 f(a)$ v těchto bodech.

Více viz "Poznámky k extrémům."

5.2 (lokální extrémy)
Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(b) $f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

Řešení:
(a) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$\mathrm{d}f(x,y) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y) = 0$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (1,1)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

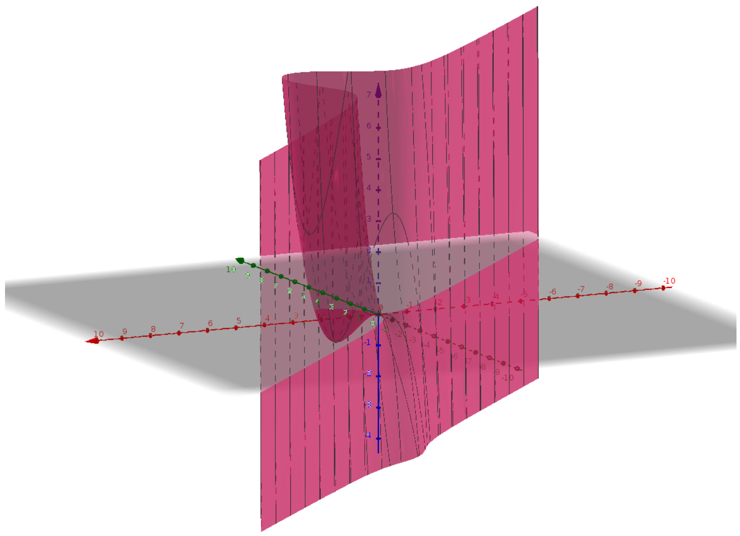
$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}^2 f(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = -6h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y) = (1,1)$ je $\mathrm{d}^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36-9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3$).



(b) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y) = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $\mathrm{d}(x,y) = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}^2 f(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = 12 \cdot h_1h_2$$

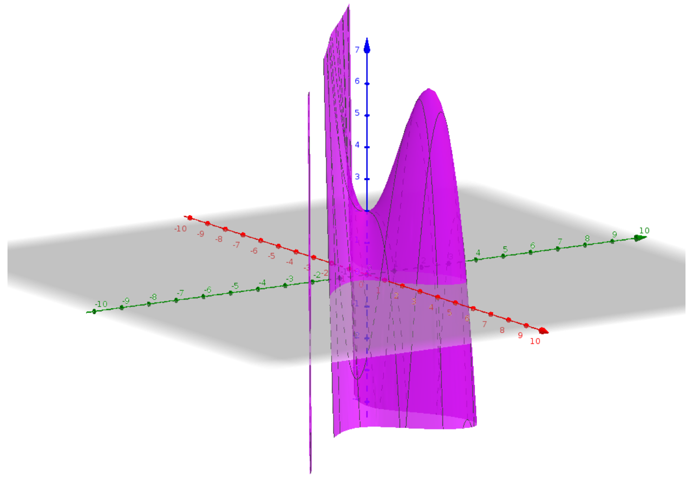
a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$\mathrm{d}^2 f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3 + 2$.



5.3 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x, y, z > 0$,

(b) $f(x,y,z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + x$.

Řešení:
(i) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y,z) = 0$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & 4x^2 \\ y^3 & = & 2xz^2 \\ y & = & z^3 \end{array} \quad \overset{y=z^3}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} (z^3)^2 & = & 4x^2 \\ (z^3)^3 & = & 2xz^2 \end{array} \quad \overset{x=z^7/2}{\Longrightarrow} \quad z^6 = 4\left(\frac{z^7}{2}\right)^2 \quad \overset{z>0}{\Longrightarrow} \quad z = 1$$

Řešení pro $x, y, z > 0$ je pouze $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$\mathrm{d}^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

- Pro $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ je

$$\mathrm{d}^2 f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72 - 16 - 24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

Toto minimum je dokonce globální. K tomu se ale musí použít menší trik využívající doplnění na čtverec v podobě $x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2} = \left(x - \frac{\alpha}{x}\right)^2 + 2\alpha$. Pro $x, y, z > 0$ máme

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} = \left(\sqrt{x} - \frac{y}{2\sqrt{x}}\right)^2 + y + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} =$$

$$= \left(\sqrt{x} - \frac{y}{2\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \frac{z}{\sqrt{y}}\right)^2 + 2z + \frac{2}{z} = \left(\sqrt{x} - \frac{y}{2\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \frac{z}{\sqrt{y}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 + 4$$

takže v bodě (x, y, z) splňujícím $\sqrt{x} = \frac{y}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{y} = \frac{z}{\sqrt{y}}$ a $\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{z}}$ je globální minimum funkce f s hodnotou 4 (pokud ovšem tyto rovnice mají řešení!). Tento bod je právě $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

(ii) Definiční obor $D(f) : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$ je otevřená množina. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2} + 1,\quad -\frac{z}{y^2} + \frac{1}{x},\quad -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y}\right)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y,z) = 0$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ zx & = & y^2 \\ y & = & z^2 \end{array} \quad \overset{y=x^2}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} zx & = & (x^2)^2 \\ x^2 & = & z^2 \end{array} \quad \overset{z=x^3}{\Longrightarrow} \quad x^2 = (x^3)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

Řešení je tedy $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ nebo $(x, y, z) = (-1, 1, -1)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$\mathrm{d}^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2z}{y^3} & -\frac{1}{y^2} \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

- Pro $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je

$$\mathrm{d}^2 f\,(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, $\Delta_3 = 8 - 2 - 2 = 4 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

V bodě $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je globální maximum na množině $U :\ x, y, z > 0$. K tomu se ale musí použít menší trik využívající doplnění na čtverec v podobě $x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2} = \left(x - \frac{\alpha}{x}\right)^2 + 2\alpha$. Pro $x, y, z > 0$ máme

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + x = \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{y}{x} + x =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{y}} + 2\sqrt{y} = \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{y}} - \sqrt[4]{y}\right)^2 + 4$$

takže v bodě (x, y, z) splňujícím $\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}$, $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ a $\frac{1}{\sqrt[4]{y}} = \sqrt[4]{y}$ je globální minimum funkce f na U s hodnotou 4 (pokud ovšem tyto rovnice mají řešení!). Tento bod je právě $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

- Pro $(x, y, z) = (-1, 1, -1)$ je

$$\mathrm{d}^2 f\,(1,1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, $\Delta_3 = -8 + 2 + 2 = -4 < 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Dále budeme hledat *absolutní (globální)* extrémy funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M.

Postup při hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M bude tento:

- pomocí nutných podmínek (obvykle to jsou Lagrangeovy multiplikátory) vyloučíme ty body, kde určitě extrémy nejsou;
- ve zbylé množině podezřelých bodů (obvykle malé) srovnáme jejich funkční hodnoty, ze kterých vybereme největší a nejmenší;
- jestliže víme, že obou extrémů musí být nabyto, pak jsou to právě předchozí nalezené největší a nejmenší hodnoty v podezřelých bodech;
- při hledání pouze globálního minima podstupujeme obdobně - tj. hledáme nejmenší hodnotu mezi podezřelými body;
- Důležité: zde nepotřebujeme používat druhou derivaci! (Ostatně, globálnost případného extrému nám tato druhá derivace stejně nemůže potvrdit.)

Poznámka: Nechť M má tvar z Lagr. věty. Jestliže nějaký bod $a \in M$ nesplňuje podmínku o lineární nezávislosti $\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_k(a)$, zařadíme ho automaticky mezi podezřelé body. Obvykle takových bodů není mnoho, případně funkce je na nich "uchopitelná". Proto při aplikaci Lagr. věty vlastně vždy ověřujeme, jestli všechny body z M splňují uvedenou podmínku pro lineární nezávislost. Pokud ano, vazbám $g_1, \dots, g_k$ se pak říká nezávislé.

Při hledání absolutních extrémů budeme využívat tyto věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}.$$

Nechť $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M. Jestliže vektory

$$\text{grad } g_1(a_0), \dots, \text{grad } g_k(a_0) \ \ \text{jsou lineárně nezávislé}$$

pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$\text{grad} f(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \text{grad} g_i(a_0)\ .$$

(Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb.)

Více viz "Poznámky k extrémům."

5.4 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$. Načrtněte útvary určené touto vazbou.

Řešení:

Doplněním na čtverec snadno zjistíme, že vazba představuje elipsu

$$M: \quad (x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3$$

tedy omezenou uzavřenou množinu. Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro

$$g(x, y) = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3\ .$$

Protože

$$dg(x,y) = \Big(2(x-1), 4(y+1)\Big)$$

tak $dg(x,y) = (0,0)$ právě když $(x,y) = (1,-1)$. Nemůže se tedy stát, aby $g(x,y) = 0$ a $dg(x,y) = (0,0)$. Takže v každém bodě množiny M je grad$g(x,y) \neq (0,0)$.

Můžeme tak použít Langrangeovu větu: Pro extrém $a = (x,y) \in M$ tak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x, 4y) = \text{grad} f(a) = \lambda \cdot \text{grad} g(a) = \lambda \cdot \Big(2(x-1), 4(y+1)\Big) \; .$$

Máme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x &= \lambda(x-1) \\ y &= \lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + 2(y+1)^2 &= 3 \end{aligned}$$

Vyjádříme $x = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ a $y = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ pomocí λ (zřejmě $\lambda \neq 1$ jinak by rovnice neměly řešení) a dosadíme do vazby. Dostaneme $(\lambda-1)^2 = 1$ s řešením $\lambda \in \{0,2\}$ a kandidáty na extrémy:

$$(2,-2)\,, \qquad (0,0)$$

s hodnotami

$$f\,(2,-2) = 12, \qquad f\,(0,0) = 0.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

Poznámka: Soustavu rovnic můžeme řešit i tak, ze vydělíme první dvě rovnice:

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda(x-1)}{\lambda(y+1)} = \frac{x-1}{y+1}$$

tedy $x(y+1) = y(x-1)$ a odsud máme, že $x = -y$. Tento vztah pak použijeme ve třetí rovnici, neboli $(y+1)^2 + 2(y+1)^2 = 3$. Odsud plyne, že $(y+1)^2 = 1$, tedy $y = 0$ nebo $y = -2$.

Musíme si ovšem uvědomit, že dělit můžeme jen něčím, co není nula. Pokud by nastalo, že $0 = y = \lambda(y+1)$, pak $\lambda = 0$ a tedy $x = \lambda(x+1) = 0$. Tedy dostáváme bod $(0,0)$, který je také řešení soustavy.

5.5 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = y^2 - x^2$ za podmínky $x^2 + 4y^2 = 4$. Načrtněte útvary určené touto vazbou.

Řešení:

Útvar je elipsa $M : x^2 + 4y^2 = 4$.

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Množina M je zadána implicitně jako

$$M = \{(x,y) \in U \mid g(x,y) = 0\}$$

kde $U : x > 0$ a vazbová funkce je

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 \; .$$

Dále, vektor grad $g(x,y) = \Big(2x, \; 8y\Big)$ je nenulový pro každé $(x,y) \in M$ (jinak by to byl spor s tím, že má platit $x^2 + 4y^2 = 4$).

Věta o Lagrangeových multiplikátorech nám tedy říká, že pro extrém $a = (x,y) \in M$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(-2x, \; 2y\Big) = \text{grad } f(a) = \lambda \text{grad } g(a) = \lambda \cdot \Big(2x, \; 8y\Big)$$

Máme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
-2x &= 2\lambda x \\
2y &= 8\lambda y \\
x^2 + 4y^2 &= 4
\end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že buď $x = 0$ nebo $\lambda = -1$.

V případě $x = 0$ dosadíme toto do třetí rovnice a máme $4y^2 = 4$, tedy $y = \pm 1$.

V případě, že $\lambda = -1$ dosadíme toto do druhé rovnice a dostaneme, že $y = 0$. Dosazením tohoto do třetí rovnice máme, že $x = \pm 2$.

Tedy jediné body, kde může být extrém jsou $(0, \pm 1)$ s hodnotou $f(0, \pm 1) = 1$ a $(\pm 2, 0)$ s hodnotou $f(\pm 2, 0) = -4$.

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce f tak na M nabývá svého maxima a minima. Porovnáním hodnot podezřelých bodů vidíme, že maximum je nabyto právě v $(0, \pm 1)$ a minimum právě v $(\pm 2, 0)$.