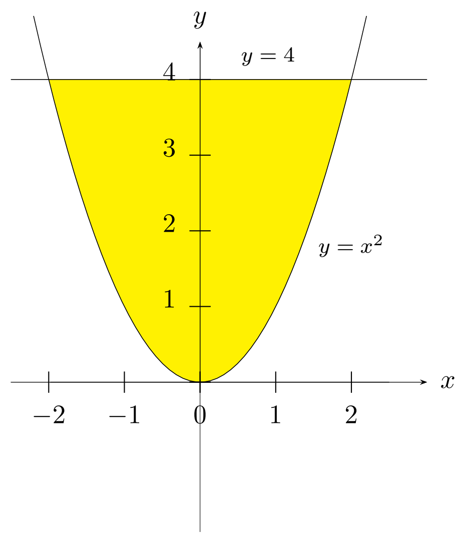
6. cvičení z Matematické analýzy 2

27. - 30. března 2023

6.1 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M: \quad x^2 \le y \le 4 \; .$$

Řešení:
Množina M je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).



Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = x^2 \;\; \& \;\; -2 \le x \le 2) \;\; \vee \\ (y = 4 \;\; \& \;\; -2 \le x \le 2) \end{array}$$

kterou nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka). POZOR: tyto dvě vazby ale NEPLATÍ současně! Každá vyjadřuje JINOU část okraje!

Extrém na M°: Nutnou podmínkou je nulovost první derivace:

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \big(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\big)$$

Toto nastává právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x \; .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na obou křivkách můžeme použít Lagrangeovu větu, ale nejvhodnější bude zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• část paraboly parametrizujeme přirozeně pomocí

$$\varphi_1 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (t, t^2) \; .$$

Pokud $a = \varphi_1(t_0)$ je bodem extrému f na části paraboly, pak je t_0 extrémem funkce $f \circ \varphi_1$ a tedy musí být $(f \circ \varphi_1)'(t_0) = 0$. Tuto úvahu ovšem můžeme udělat právě jen proto, že t_0 je VNITŘNÍM bodem intervalu $(-2,2)$. Z tohoto důvodu MUSÍME při vyšetřování části paraboly vynechat její koncové body, kde navazuje na úsečku (tyto koncové body automaticky zařadíme do podezřelých bodů).

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_1(t) := f(\varphi_1(t)) = f(t, t^2) = 4t^2 + t^4 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2) \; .$$

Máme $g_1'(t) = 8t + 4t^3 = 4t(2 + t^2) = 0$ právě když $t = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

• podobně úsečku parametrizujeme přirozeně pomocí OTEVŘENÉHO intervalu

$$\varphi_2 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_2(t) = (t, 4) \; .$$

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_2(t) := f(\varphi_2(t)) = f(t, 4) = 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2) \; .$$

Rovnice $g_2'(t) = 6t^2 + 8t - 8 = 6\left(t - \frac{2}{3}\right)(t+2) = 0$ má řešení jen pro $t = \frac{2}{3} \in (-2,2)$. Podezřelým bodem tak je $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$ s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{16 \cdot 22}{27}$.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2,4)$ a $(2,4)$ s hodnotami $f(-2,4) = f(2,4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj. $32 > \frac{16 \cdot 22}{27} > 0$) dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a minima v bodě $(0,0)$.

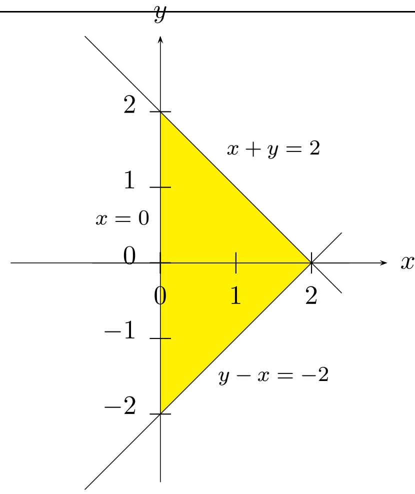
6.2 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ na ploše trojúhelníka M s vrcholy $(2,0)$, $(0,2)$ a $(0,-2)$.

Řešení:

Množina

$$M : \quad x \geq 0 \;\;\&\;\; x + y \leq 2 \;\;\&\;\; y - x \geq -2$$

je zřejmě omezená i uzavřená. (Spojitá) funkce f tak nabývá na M svého maxima i minima.



Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x > 0 \ \ \& \ \ x + y < 2 \ \ \& \quad y - x > -2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{l} (x + y = 2 \ \ \& \ \ 0 \le x \le 2) \ \ \vee \\ (y - x = -2 \ \ \& \ \ 0 \le x \le 2) \ \ \vee \\ (x = 0 \ \ \& \ \ -2 \le y \le 2) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hrany trojúhelníku) a tři body (vrcholy trojúhelníku). Tyto vazby ale NEJSOU splněné SOUČASNĚ (což je vidět i z toho, že používáme logickou spojku "NEBO", nikoliv "A").

Extrém na M°: Nutná podmínka je nulovost první derivace:

$$(0, 0) = \mathrm{d}f(x, y) = \big(2x - 2, 2y\big)$$

Toto nastává pro $a = (1, 0) \in M^\circ$ a $f\,(1, 0) = -1$.

Extrém na ∂M:

Pro každou z hran trojúhelníka můžeme použít Lagrangeovu větu, ale zde je jednodušší využít parametrizaci těchto hran.

• Horní hranu zparametrizujeme pomocí proměnné x jako

$$\varphi_1(x) = (x, 2 - x) \ \text{ pro } \ x \in (0, 2)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g_1(x) = (f \circ \varphi_1)(x) = f(x, 2 - x) = x^2 + (2 - x)^2 - 2x = 2x^2 - 6x + 4$$

pro $x \in (0, 2)$. Máme

$$g_1'(x) = 4x - 6 = 0$$

právě když $x = \frac{3}{2} \in (0, 2)$ (zdůrazněme, že tento interval nutně musí být OTEVŘENÝ - jinak nemůžeme použít nutnou podmínku, tj. nulovost derivace). Tedy podezřelý bod je $\left(\frac{3}{2}, 2 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

• Dolní hranu můžeme vyšetřit obdobně, ale ještě lépe je využít symetrie: funkce f i množina M zůstávají stejné při záměně y za $-y$ (tj. při použití osové symetrie podle osy x). Dostaneme tak druhý podezřelý bod $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ se stejnou hodnotou $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

• Boční hranu zparametrizujeme pomocí proměnné y jako

$$\varphi_3(y) = (0, y) \quad \text{pro} \quad y \in (-2, 2)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g_3(y) = (f \circ \varphi_3)(y) = f(0, y) = y^2$$

pro $y \in (-2, 2)$. Tato funkce má zřejmě extrém v bodě $y = 0$ a podezřelý bod je $(0, 0)$ s hodnotou $f(0, 0) = 0$.

• Posledními podezřelými body jsou vrcholy trojúhelníku (ty nelze zařadit do ostatních vazeb, protože ty musí být definovány v rámci otevřených množin - opět proto, abychom mohli derivovat).

Porovnáním hodnot podezřelých bodů

(x, y)	$f(x, y)$
$(1, 0)$	-1
$\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$
$(0, 0)$	0
$(0, \pm 2)$	4
$(2, 0)$	0

dostáváme, že funkce f nabývá svého minima v bodě $(1, 0)$ a maxima v bodech $(0, 2)$ a $(0, -2)$.

Poznámka: Grafem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1$ na $\mathbb{R}^2$ je rotační paraboloid a je zřejmé, že v bodě $(1, 0)$ má ostré globální minimum na celém $\mathbb{R}^2$.

6.3 (vázané extrémy - aplikace)

Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

Řešení:

Nechť bazén má dno s rozměry $x, y > 0$ a výšku $z > 0$. Budeme tedy hledat minimum funkce

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

na množině

$$M = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\},$$

kde

$$U: \; x, y, z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x, y, z) = xyz - V$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ a $\mathrm{grad}\Phi(a) = (yz, xz, xy) \neq (0,0,0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x,y,z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(y + 2z, x + 2z, 2x + 2y) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda(yz, xz, xy)$$

a

$$xyz = V \;\&\; x, y, z > 0\ .$$

Máme tak rovnice:

$$\begin{array}{rcl} y + 2z & = & \lambda yz \\ x + 2z & = & \lambda xz \\ 2x + 2y & = & \lambda xy \\ xyz & = & V \end{array} \quad \xRightarrow{\text{vynásobení rovnic vhodnou proměnnou}} \quad \begin{array}{rcl} xy + 2xz & = & \lambda xyz = \lambda V \\ xy + 2yz & = & \lambda xyz = \lambda V \\ 2xz + 2yz & = & \lambda xyz = \lambda V \\ xyz & = & V \end{array}$$

Z prvních dvou rovnic máme $xy + 2xz = \lambda V = xy + 2yz$, tedy $x = y$. Z druhé a třetí rovnice máme $xy + 2yz = \lambda V = 2xz + 2yz$, tedy $y = 2z$. Po dosazení $x = y = 2z$ do čtvrté rovnice máme $V = 2z \cdot 2z \cdot z$, tedy $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right)$.

Množina M je uzavřená (je to průnik uzavřené množiny dané rovností $V = xyz$ a uzavřené množiny dané neostrými nerovnostmi $x, y, z \geq 0$), ale NENÍ omezená. Potřebujeme tedy využít:

Větu o nabytí globálního minima: Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na uzavřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť dále platí

$$(\forall\ K > 0)(\exists\ L > 0)(\forall\ a \in M) \qquad \|a\| \geq L \Rightarrow f(a) \geq K$$

(tj. jestliže se s bodem a vzdalujeme od počátku, jde hodnota $f(a)$ do plus nekonečna).
Pak funkce f nabývá na M svého globálního minima.

Ověření podmínky po funkci f chce menší trik: pro body $a = (x, y, z) \in M$ máme s využitím podmínek $x, y, z > 0$ a $xyz = V$, že

$$\big(f(a)\big)^2 = (xy + 2yz + 2xz)^2 \geq (xy + yz + xz)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2y^2 + 2xyz(x + y + z) \geq$$

$$\geq 2V(x + y + z) \geq 2V\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2V\|a\|\ .$$

Celkově tedy $\big(f(a)\big)^2 \geq 2V\|a\|$ a tudíž $f(a) \geq \sqrt{2V} \cdot \sqrt{\|a\|}$. Tedy pokud nyní pro $a \in M$ bude $\|a\|$ dostatečně velké, bude dostatečně velká i hodnota $f(a)$.

Z této věty tedy vidíme, že nalezený podezřelý bod je skutečně bodem minima funkce f na M.

6.4 (vázané extrémy - aplikace)

Do úseče kužele $1 - z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ vymezené rovinou $z = 0$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu: Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kvádru leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z),

který leží v množině:

$$M: \quad (1-z)^2 = x^2 + 2y^2 \ \ \& \ \ 0 \le x, y \ \ \& \ \ 0 \le z \le 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x,y,z) = xyz \ .$$

Hledáme tedy maximum f na M. Množina M je uzavřená (je to průnik uzavřených množin) a omezená (jak se snadno nahlédne). K použití věty o Langrangeových multiplikátorech potřebujeme ale množinu tvaru $\{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$, kde U je OTEVŘENÁ množina v $\mathbb{R}^3$. Množinu M proto rozdělíme na

$$M_1: \quad \underbrace{0 < x, y \ \& \ \ 0 < z < 1}_{=:U} \ \ \& \ \ \Phi(x,y,z) = 0$$

a

$$M_2: \quad (x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ z = 0 \ \vee \ z = 1) \ \ \& \ \ 0 \le x, y \ \ \& \ \ 0 \le z \le 1 \ \ \& \ \ \Phi(x,y,z) = 0$$

kde $\Phi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - (z-1)^2$ je vazbová funkce.

Pro body extrémů na M_1 můžeme teď použít Lagrangeovu podmínku (protože pro $a \in M_1$ je $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq (0,0,0)$, jak bude vidět). Tedy budeme tu mít $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(yz, \ xz, \ xy\Big) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda\Big(2x, \ 4y, \ 2(1-z)\Big)$$

a

$$(z-1)^2 = x^2 + 2y^2 \ .$$

Protože na U jsou hodnoty x, y a $1-z$ nenulové, můžeme vydělit první rovnici třetí rovnicí a také druhou rovnici opět třetí rovnicí:

$$\begin{array}{rcl} yz &=& \lambda 2x \\ xz &=& \lambda 4y \\ xy &=& \lambda 2(1-z) \\ (z-1)^2 &=& x^2 + 2y^2 \end{array} \quad \overset{\text{vydělení rovnic}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} z(1-z) = x^2 \\ z(1-z) = 2y^2 \\ (z-1)^2 = x^2 + 2y^2 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (z-1)^2 = z(1-z) + z(1-z) \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 = z(1-z) = \frac{2}{9} \\ y^2 = \frac{1}{2}z(1-z) = \frac{1}{9} \end{array} \quad \overset{x,y>0}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$$

Jediný podezřelý bod na M_1 je tedy $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{27}$.

Na množině M_2 je funkce f konstantně nulová, takže celou M_2 můžeme zařadit mezi podezřelé body.

Porovnáním funkčních hodnot (a tím, že f nabývá extrémů na M), pak ihned máme, že kvádr s maximálním objemem je určen vrcholem $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (a jeho symetrickými protějšky na eliptickém kuželu).

6.5 Najděte body minima a maxima funkce $f(x,y,z) = 3x + 3y + 8z$ na množině

$$M: \quad x^2 + z^2 = 1 \ \ \& \ \ y^2 + z^2 = 1 \ .$$

Řešení:
Položme
$$\Phi_1(x,y,z) = x^2 + z^2 - 1$$
$$\Phi_2(x,y,z) = y^2 + z^2 - 1.$$
Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0, \Phi_2(a) = 0\}$. Množina M je průnik dvou válců. Tento průnik představuje dvě protínající se elipsy.

uzavřenost M: Množina $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M: Z rovnice $x^2 + z^2 = 1$ vyplývá, že $|x| \le 1$ a $|z| \le 1$. Podobně z $y^2 + z^2 = 1$ vyplývá, že $|y| \le 1$. Takže M je omezená.

Vazby máme dvě a potřebujeme zjistit, zda jsou v bodech množiny M gradienty vazeb lineárně nezávislé.

nezávislost vazeb:
Potřebujeme vědět, zda pro $a = (x,y,z)$ platí:
$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{grad}\Phi_1(a) \ \text{ a } \ \mathrm{grad}\Phi_2(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$
Máme
$$\mathrm{grad}\Phi_1(a) = (2x, 0, 2z) \neq (0,0,0)$$
$$\mathrm{grad}\Phi_2(a) = (0, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$$
Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $x = y = 0$, což jsou právě body $(0,0,\pm1) \in M$ s hodnotami $f(0,0,\pm1) = \pm 8$. Jsou to právě ty body M, kde se obě elipsy protínají. Pro ně tedy nelze použít Lagrangeovu větu a proto tyto body zařadíme mezi podezřelé.

V ostatních bodech M platí lineární nezávislost gradientů a můžeme pro ně (korektně) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x,y,z) \in M \setminus \{(0,0,\pm1)\}$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že
$$(3,3,8) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi_1(a) + \mu \cdot \mathrm{grad}\Phi_2(a) = \lambda(2x,0,2z) + \mu(0,2y,2z)$$
a
$$x^2 + z^2 = 1 \qquad \text{a} \qquad y^2 + z^2 = 1.$$
Máme tak soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} 3 &= 2\lambda x \\ 3 &= 2\mu y \\ 8 &= 2(\lambda+\mu)z \\ x^2 + z^2 &= 1 \\ y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$
Když od sebe odečteme poslední dvě rovnice dostaneme $x^2 = y^2$, tedy $x = \pm y$.
Případ $x = -y$: Po dosazení $x = -y$ do první rovnice a vydělením prvních dvou rovnic máme, že $\lambda = -\mu$. Po dosazení do třetí rovnice máme $8 = 2(\lambda - \lambda)z = 0$, což je spor, takže řešení neexistuje.

Případ $x = y$: Po dosazení $x = y$ do první rovnice a vydělením prvních dvou rovnic máme, že $\lambda = \mu$. Dostáváme tak systém

$$\begin{aligned} 3 &= 2\lambda x \\ 8 &= 4\lambda z \\ x^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Vydělením prvních dvou rovnic máme $\frac{3}{8} = \frac{2x}{4z}$, tedy $x = \frac{3}{4}z$. Dosazením do poslední rovnice dostaneme $z = \pm\frac{4}{5}$. Máme tak podezřelé body $(x, y, z) = \pm(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ s hodnotami $f(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 10$ a $f(-\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = -10$. Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech. Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f maximum v $(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ a minimum v $(-\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

6.6 (extrémy pro dvě vazby)

Určete největší a nejmenší hodnoty funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině M dané podmínkami

$$x + y + z = 5 \qquad \& \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Řešení:

Máme opět vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je $M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \;\;\&\;\; \Phi_2(a) = 0\}$.

uzavřenost M:

Množiny $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$ je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny $\{0\}$ při spojitých zobrazeních Φ_i a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M:

Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. $z = 5 - x - y$), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x + y)(5 - x - y) = 8$$

$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y = -8$$

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2 - 2 \cdot 8 (= 9)$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:

Potřebujeme ukázat, že pro $a = (x, y, z)$ platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{grad}\Phi_1(a) \ \text{ a } \ \mathrm{grad}\Phi_2(a) \ \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Máme

$\mathrm{grad}\Phi_1(a) = (1, 1, 1)$

$\mathrm{grad}\Phi_2(a) = (y + z, z + x, x + y).$

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když $y + z = z + x = x + y$ neboli když $x = y = z$. Pokud by přitom mělo platit $\Phi_1(a) = 0$ a $\Phi_2(a) = 0$, pak dostáváme, že $3x = 5$ a $3x^2 = 8$, což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:
Pro bod $a = (x, y, z) \in M$ absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, zx, xy) = \mathrm{grad}f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi_1(a) + \mu \cdot \mathrm{grad}\Phi_2(a) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(y + z, z + x, x + y)$$

a

$$x + y + z = 5 \qquad \text{a} \qquad xy + yz + zx = 8.$$

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda + \mu(y + z)$$

$$zx = \lambda + \mu(z + x)$$

dostaneme $z(y - x) = \mu(y - x)$, což dává podmínku buď $x = y$ nebo $z = \mu$. Symetricky dostaneme další podmínku $y = z$ nebo $x = \mu$. Odsud snadno plyne, že vždy je buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = \mu = z$, tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky $x = y$ dostáváme dosazením do vazeb řešení $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ nebo $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Hodnoty parametru λ ani μ už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jen tyto:

$$a = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \qquad \text{kde} \quad f(a) = 4$$

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \qquad \text{kde} \quad f(a) = \frac{112}{27}.$$

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože $\frac{112}{27} > 4$).