7. cvičení z Matematické analýzy 2

3. - 7. dubna 2023

Fubiniho věta: Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na vnitřku E° oblasti E a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_E |f| \; dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a oblast E je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_E f \; dS$ a platí

$$\iint\limits_E f \; dS = \int\limits_{\pi_2(E)} \left(\int\limits_{\substack{\text{(vodorovný) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \mathbb{R} \times \{y\}}} f(x,y) \; dx \right) dy$$

$$\iint\limits_E f \; dS = \int\limits_{\pi_1(E)} \left(\int\limits_{\substack{\text{(svislý) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \{x\} \times \mathbb{R}}} f(x,y) \; dy \right) dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

7.1 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Změňte pořadí integrace v integrálu

(i)

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y) \; dy \; dx$$

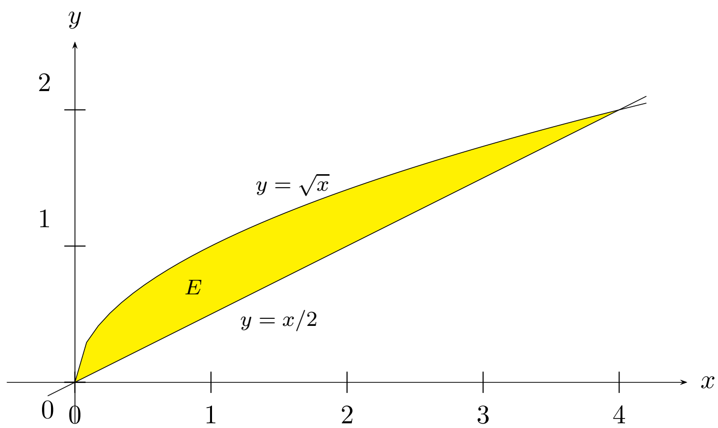
(ii)

$$\int_1^{-1} \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \; dy \; dx.$$

Řešení:
V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

$$E : \quad 0 \le x \le 4 \quad \& \quad x/2 \le y \le \sqrt{x}.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

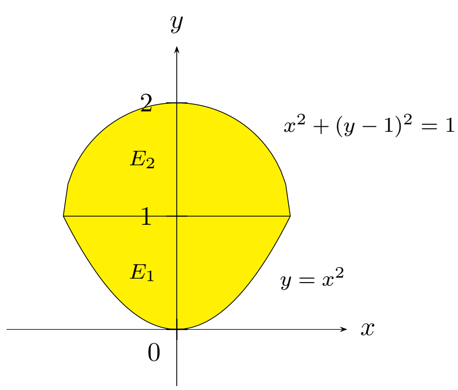
$$E: \quad y^2 \leq x \leq 2y \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{x/2} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^2 \int_{y^2}^{3y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(b) Základní oblast integrace je

$$E: \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \& \quad x^2 \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}.$$



Vodorovný řez bude svým popisem záviset na výšce řezu. Horní část je určena křivkou $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$ tedy $x^2 + (y-1)^2 = 1$, což je kružnice. Oblast proto rozdělíme na dvě oblasti

$$E_1: \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \& \quad x^2 \leq y \leq 1$$

$$E_2: \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 1 \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}.$$

Po výměně pořadí integrace máme

$$E_1: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$$

$$E_2: \quad 1 \le y \le 2 \quad \& \quad -\sqrt{1-(y-1)^2} \le x \le \sqrt{1+(y-1)^2}.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\ dx\ dy.$$

7.2 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočítejte hodnotu integrálu:

(a)

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\ dS,$$

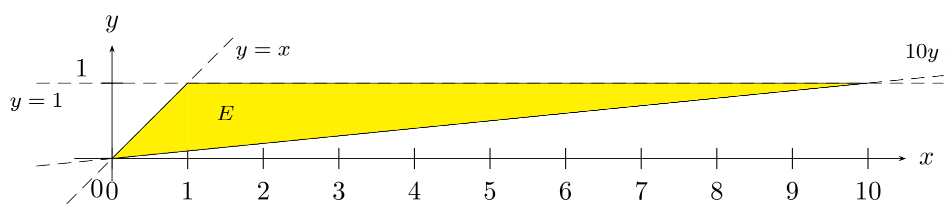
kde oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$.

(b)

$$\iint\limits_E \frac{1}{y^4+1}\ dS$$

kde oblast E je omezena křivkami $x = y^3$, $y = 2$ a $x = 0$.

Řešení:
(a) Oblast E je trojúhelník:



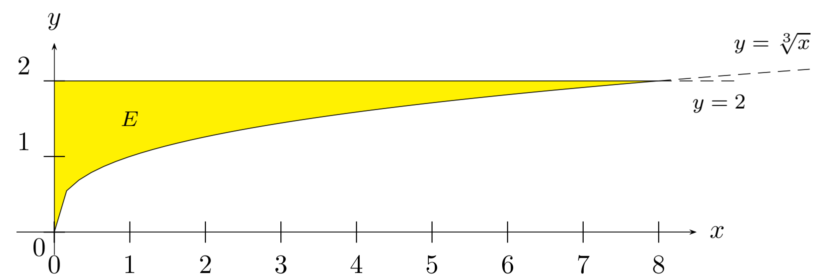
Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \ \ 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_y^{10y} e^{\frac{x}{y}}\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_{x=y}^{x=10y} dy = \int\limits_0^1 y\left(e^{10}-e\right)\ dy = \frac{1}{2}\left(e^{10}-e\right)\ .$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $y \le x \le 10y$ a $0 < y$, tak $1 \le \frac{x}{y} \le 10$ a tedy $e^1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^{10}$. Funkce f je proto na $E \setminus \{(0,0)\}$ omezená, kladná a spojitá a integrál na celé E tedy existuje a je konečný.

(b) Oblast je tvaru (viz obrázek).



Výhodnější bude funkci nejdříve integrovat podle proměnné x. Takže

$$E: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le y^3,$$

a dostáváme tak

$$\iint_E \frac{1}{y^4+1}\, dy\, dx = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx \Big)\, dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

Těžiště tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o (nezáporné) hustotě $\varrho(x,y) : E \to \mathbb{R}$ se definuje jako bod $T = (T_1, T_2) \in \mathbb{R}^2$ kde

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x \cdot \varrho(x,y)\, \mathrm{d}S,$$

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y \cdot \varrho(x,y)\, \mathrm{d}S,$$

a $m = \iint_E \varrho(x,y)\, \mathrm{d}S$ je hmotnost tohoto tělesa.

7.3 Určete těžiště

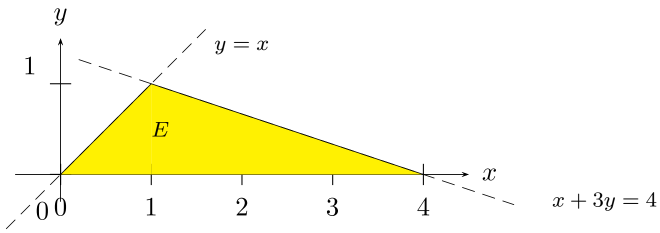
(i) trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = x$.

(ii) útvaru omezeného křivkami $xy = 1$ a $x + y = \frac{5}{2}$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = 1$.

Řešení:
Oblast E je ve všech případech konvexní, takže těžiště bude ležet v E. Je dobré si vždy u výsledků tuto vlastnost v případě konvexních množin zkontrolovat.

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1, \quad y \le x \le 4 - 3y.$$



Jednotlivé integrály tedy jsou
hmotnost:

$$m = \iint\limits_E \varrho \; dS = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} x \; dx \Big) \; dy = \int\limits_0^1 \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (3y-4)^2 - y^2 \; dy = \frac{1}{2} \Big[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint\limits_E x\varrho(x,y) \; dS = \frac{3}{10} \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} x^2 \; dx \Big) \; dy = \frac{1}{10} \int\limits_0^1 \Big[x^3 \Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

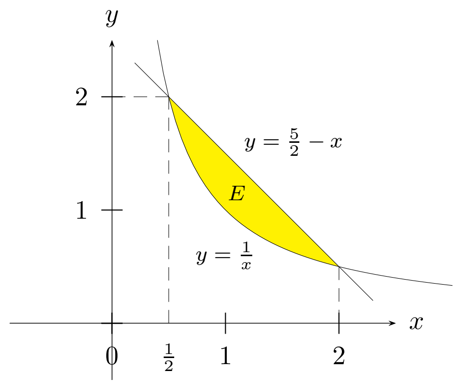
$$= \frac{1}{10} \int\limits_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \; dy = \Big[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40} \Big]_0^1 = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint\limits_E y\varrho(x,y) \; dS = \frac{3}{10} \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} xy \; dx \Big) \; dy = \frac{3}{20} \int\limits_0^1 \Big[x^2 y \Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

$$= \frac{3}{20} \int\limits_0^1 y(4-3y)^2 - y^3 \; dy = \frac{6}{5} \int\limits_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \; dy = \frac{6}{5} \Big[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2 \Big]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

(b) Oblast E je vnitřní část hyperboly $xy = 1$ která je oříznutá přímkou $x + y = \frac{5}{2}$.



Potřebujeme zjistit rozsah proměnných neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$\left(xy = 1 \quad \wedge \quad x + y = \frac{5}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left((x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, 2\right) \quad \vee \quad (x,y) = \left(2, \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E: \ \ \tfrac{1}{2} \le x \le 2 \ \ \& \ \ \tfrac{1}{x} \le y \le \tfrac{5}{2} - x$$

Vzhledem k symetrii E budeme mít $T_1 = T_2$.
hmotnost:

$$m = \iint_E \varrho \, dS = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1 \, dy \Big) \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x} \, dx = \frac{15}{4} - \Big[\frac{x^2}{2} + \ln x \Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{15}{8} - 2 \ln 2$$

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{m} \iint_E x \varrho(x,y) \, dS = \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} x \, dy \Big) \, dx = \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2}x - x^2 - 1 \, dx =$$

$$= \frac{1}{m} \Big[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{m} \frac{9}{16} = \frac{9}{30 - 32 \ln 2} \doteq 1.151 \ .$$

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det(\mathrm{d}\Phi) \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint_{\Phi(U)} f(x,y) \, dx \, dy = \iint_U (f \circ \Phi)(\alpha, \beta) \cdot |\det(\mathrm{d}\Phi(\alpha,\beta))| \, d\alpha \, d\beta.$$

7.4 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x,y)\;dx\;dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\;d\varphi$ pro oblasti

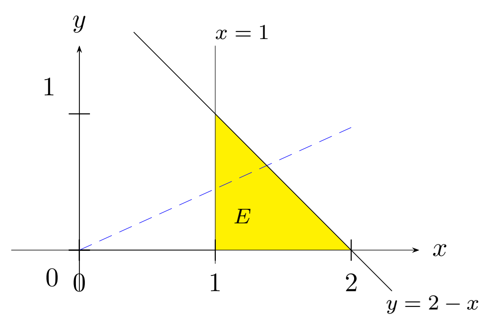
(i) E, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

(ii) $E: \quad 0 \leq x \leq 1 \;\; \& \;\; x^2 \leq y \leq 1.$

Řešení:
Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\;d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

(a) Oblast E je trojúhelník ohraničený přímkami $x=1$, $y=0$ a $x+y=2$ a dá se popsat také jako

$$E: \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2-x$$



Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\;d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ, což je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Pro pevně zvolené φ teď určíme rozsah proměnné ϱ. Ten je ze zdola určený přímkou $x=1$ a shora přímkou $x+y=2$. Po dosazení $x=\varrho\cos\varphi$ a $y=\varrho\sin\varphi$ do těchto rovnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi = x+y = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varrho}$$

a zdola pomocí

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

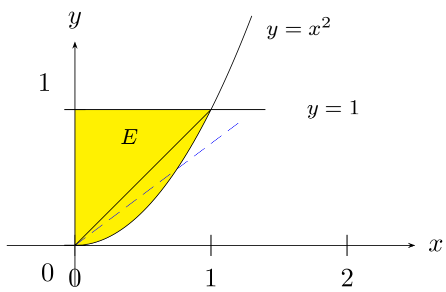
Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \leq \varrho \leq \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\;dx\;dy = \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\;d\varrho\;d\varphi\;.$$

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Oblast E je potřeba rozdělit na dvě části podle předpisu hraničních křivek - jedna je $y=x^2$ a druhá $y=1$.



Po dosazení polárních souřadnic pak máme v jedné části omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho \sin\varphi = y = x^2 = \varrho^2 \cos^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

a v druhé

$$\varrho \sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad \left(0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) \vee$$
$$\vee \left(\tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\sin\varphi}\right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$