8. cvičení z Matematické analýzy 2

10. - 14. dubna 2023

(1. zápočtový test)

8.1 (polární souřadnice)
Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx,$$

(b)

$$\int_{0}^{1} \int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx$$

Řešení:

Polární souřadnice je vhodné používat vzhledem když množina a/nebo funkce vykazují rotační symetrii. Je to transformace s předpisem

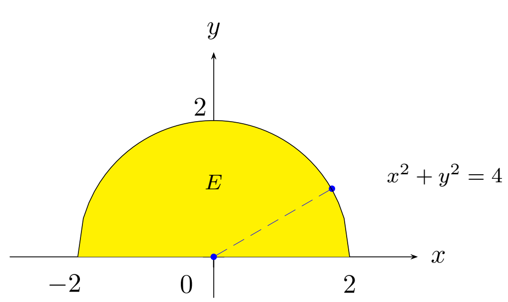
$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E : \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku.



Jeho parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U : \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 2 \; .$$

takže máme

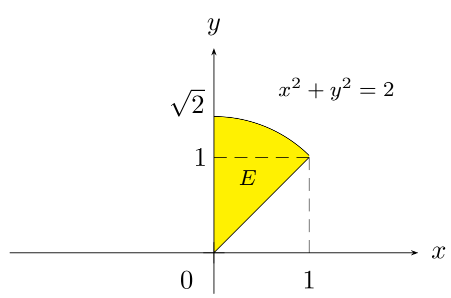
$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\ dx = \iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dS = \iint\limits_{U} r^2(\underbrace{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}_{=\cos 2\varphi})\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^2\ dr\right)\cdot \underbrace{\left(\int_0^{\pi}\cos 2\varphi\ d\varphi\right)}_{=0} = 0\ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2-x^2}$$

což je kruhová výseč.



Její parametrizace $E=\Psi(U)$ ve sférických souřadnicích je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Takže máme

$$\int_0^1\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx = \iint\limits_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dS = \iint\limits_U r\cos\varphi\ dr\ d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\ dr\ d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r\ dr\right)\cdot\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\ d\varphi\right) = 1\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x)g(y)\ dV = \Big(\int\limits_X f(x)\ dx\Big)\cdot\Big(\int\limits_Y g(y)\ dy\Big)$$

pro integrabilní funkce $f: X \to \mathbb{R}$ a $g: Y \to \mathbb{R}$.

8.2 (lineární substituce)

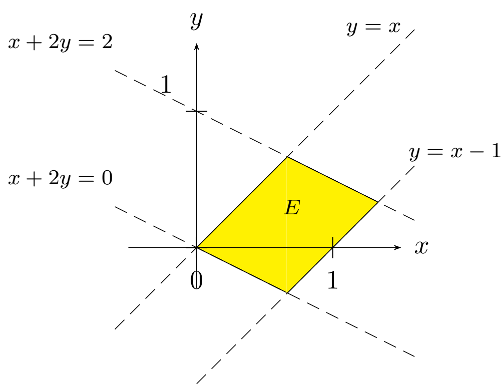
S použitím substituce určete

$$\iint_E (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\,dA$$

kde E je omezená oblast určená křivkami $y=x$, $y=x-1$, $x+2y=0$, $x+2y=2$.

Řešení:

Oblast E zjistíme z náčrtu:



Je to tedy

$$E: \quad x-1 \le y \le x, \quad 0 \le x+2y \le 2$$

což ještě přepíšeme jako

$$E: \quad 0 \le x-y \le 1, \quad 0 \le x+2y \le 2\ .$$

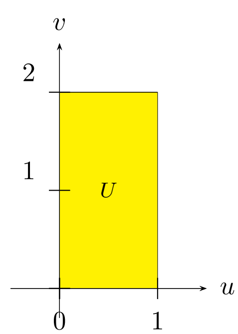
Vzhledem k tvaru množiny i funkce se nabízí použít (lineární) substituci Ψ, kterou zadáme pomocí její inverze:

$$\Psi^{-1}: \quad \begin{array}{rcl} u & = & x-y \\ v & = & x+2y \end{array}$$

Množina

$$U: \quad 0 \le u \le 1 \quad \& \quad 0 \le v \le 2\ .$$

zřejmě parametrizuje E jako $E=\Psi(U)$.



Pro jakobián máme

$$\det(\mathrm{d}\Psi) = \frac{1}{\det\left(\mathrm{d}(\Psi^{-1})\right)} = \frac{1}{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{1}{3}\ .$$

Po substituci pak máme

$$\iint\limits_{E=\Psi(U)} (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\, dA = \iint\limits_{U} v\sqrt[3]{u}\cdot\frac{1}{3}\, du\; dv = \frac{1}{3}\int\limits_0^2\int\limits_0^1 v\sqrt[3]{u}\; du\; dv =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^2 v\; dv\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 \sqrt[3]{u}\; du\right) = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left[\frac{3}{4}u^{4/3}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}.$$

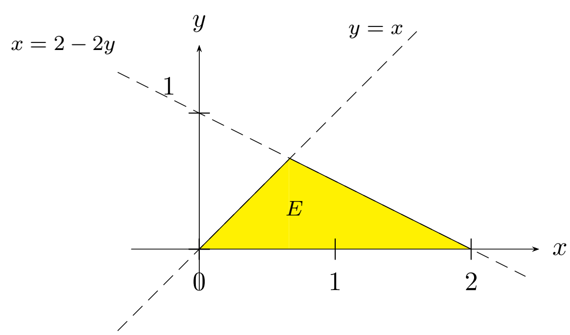
8.3 (lineární substituce)
Použijte substituci $u = x+2y$, $v = x-y$ pro výpočet integrálu

$$\int\limits_0^{\frac{2}{3}}\int\limits_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x}\; dx\; dy.$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E:\quad 0 \le y \le \frac{2}{3},\qquad y \le x \le 2-2y.$$

Jde o trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ a $(2,0)$.



Substituce Φ je lineární zobrazení, které je zadáno svou inverzí, tedy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trojúhelník lze vyjádřit jako tzv. *konvexní obal* ze svých vrcholů (tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje dané vrcholy - pro body $A_1,\dots,A_n$ je konvexní obal $[A_1,\dots,A_n]_\alpha$ dán jako

$$[A_1,\dots,A_n]_\alpha = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid 0 \le \lambda_1,\dots,\lambda_n\ \&\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}).$$

Protože (prosté) lineární zobrazení Φ konvexní obaly zachovává, je množina U taková, že $\Phi(U) = E$, daná také jako konvexní obal z vrcholů

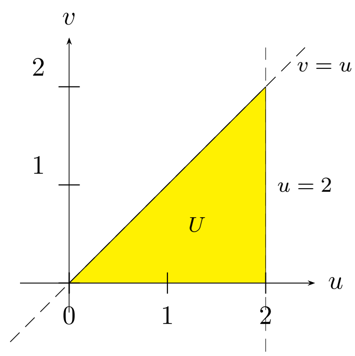
$$\Phi^{-1}(0,0) = (0,0)$$

$$\Phi^{-1}\Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big) = (2,0)$$

$$\Phi^{-1}(2,0) = (2,2).$$

Tedy

$$U: \quad 0 \le v \le u, \quad 0 \le u \le 2.$$



Dále je $(\Phi^{-1})' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det \Phi' = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'} = -\frac{1}{3}$. Po substituci pak máme

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x}\, dx\, dy = \iint_{E=\Phi(U)} (x+2y)e^{y-x}\, dS = \iint_U ue^{-v} \cdot \frac{1}{3}\, dS =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \int_0^u ue^{-v}\, dv\, du = \frac{1}{3}\int_0^2 u\Big[-e^{-v}\Big]_{v=0}^{v=u} du = \frac{1}{3}\int_0^2 u(1-e^{-u})\, du = \frac{1}{3}\Big[\frac{u^2}{2} + (u+1)e^{-u}\Big]_0^2 =$$

$$= 1 + e^{-2}.$$