9. cvičení z Matematické analýzy 2

17. - 21. dubna 2023

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint\limits_E f\ dV = \iint\limits_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int\limits_{\substack{\text{řez množinou } E \text{ pomocí} \\ \text{přímky } \{(x,y)\} \times \mathbb{R}}} f(x,y,z)\ dz \Big)\ dx\ dy,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$. Případně:

$$\iiint\limits_E f\ dV = \int\limits_{\pi_3(E)} \Big(\iint\limits_{\substack{\text{řez množinou } E \text{ pomocí} \\ \text{roviny } \mathbb{R}^2 \times \{z\}}} f(x,y,z)\ dx\ dy \Big)\ dz$$

kde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_3(x,y,z) = z$.

Řezy v prvním případě jsou "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.)

Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je ve druhém případě množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné "plátky", přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_3(E)$).

9.1 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtěte

(a)

$$\iiint\limits_E xyz\ dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(b)

$$\iiint\limits_E y\ dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:

(i) Projekce $\pi_{1,2}(E)$ oblasti integrace E do roviny xy je určena množinou omezenou křivkami $y = x^2$ a $x = y^2$. Ty totiž určují omezenou oblast v 1. kvadrantu, tj. tam, kde je $x, y \geq 0$. A proto je pak už (pro $x, y \geq 0$) oblast E určena v tomto kvadrantu grafem funkce $z = xy \geq 0$ shora a grafem funkce $z = 0$ zdola. Oblast integrace je tak

$$E : \quad 0 \leq z \leq xy, \quad \underbrace{x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xyz\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \int\limits_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x^5 - x^{11}\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le x + 2y, \quad \underbrace{0 \le y \le x^2, \quad 0 \le x \le 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

I zde platí

$$\iiint\limits_E y\ dV = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y)\ dy\ dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^2}\ dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\ dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

9.2 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtěte

$$\iiint\limits_E xy\ dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Řešení:

Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \le z \le y - x, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy\ dV = \int_0^1 \int_0^{y} \int_0^{y-x} xy\ dz\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^{y} y^2 x - x^2 y\ dx\ dy = \int_0^1 \left[y^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=y}\ dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3}\ dy = \left[\frac{y^5}{30}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

Věta o substituci (trojný integrál): Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det(d\Phi) \neq 0$ všude na U° a

- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných ploch, křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv trojného integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iiint\limits_{\Phi(U)} f\ dV = \iiint\limits_{U} (f\circ\Phi)(\alpha,\beta,\gamma)\cdot|\det(d\Phi(\alpha,\beta,\gamma))|\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Cylindrické souřadnice mají předpis:

$$\Phi: \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & h \end{array}$$

kde $(r,\varphi,h)\in\langle 0,+\infty)\times\langle 0,2\pi\rangle\times\mathbb{R}$. Dále je

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det(d\Phi) = r\ .$$

Moment setrvačnosti: Moment setrvačnosti J tělesa $E\subseteq\mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho(x,y,z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako

$$J = \iiint\limits_{E} v^2(x,y,z)\cdot\varrho(x,y,z)\ dV$$

kde funkce $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy p. Tělesa s velkým momentem setrvačnosti jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

9.3 (cylindrické souřadnice)

Zapište integrál pomocí cylindrických souřadnic a pak jej spočítejte

$$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx.$$

Řešení:

Oblast integrace je

$$E:\quad |x|\le 2 \quad \& \quad |y|\le\sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$$

neboli

$$E:\quad x^2\le 4 \quad \& \quad x^2+y^2\le 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$$

a tedy

$$E:\quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U:\quad 0\le r\le h\le 2 \quad \& \quad 0\le\varphi\le 2\pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)}(x^2+y^2)\ dV =$$

$$= \iiint\limits_{U} r^2\cdot r\ dV = \int\limits_0^2\int\limits_0^h\int\limits_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\ dr\ dh = 2\pi\int\limits_0^2\int\limits_0^h r^3\ \ dr\ dh =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^2 h^4 \quad dh = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti kužele E s hustotou $\varrho(x, y, z) = 1$ vzhledem k jeho ose symetrie (což je osa z).

9.4 (cylindrické souřadnice)

Vyjádřete moment setrvačnosti J tělesa

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \;\;\&\;\; 0 \leq x \leq 1 \;\;\&\;\; 0 \leq y \leq 1 \;\;\&\;\; 0 \leq z.$$

s hustotou $\sigma(x, y, z) = 1$ vzhledem k ose otáčení z pomocí cylindrických souřadnic (a případně ho spočítejte).

Řešení:

Těleso E je průnik horní poloviny koule o poloměru $\sqrt{2}$, 1. oktantu (tj. osminy prostoru se všemi souřadnicemi nezápornými) a je ořezáno rovinami $x = 1$ a $y = 1$. Použitím cylindrických souřadnic v pořadí $\cdots d\varphi$ si těleso řežeme polorovinami, které procházejí osou z a jsou určeny úhlem φ. Průmětem E do roviny xy je čtverec $0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq 1$. Podle volby úhlu φ se bude lišit rozsah proměnné r, takže je vhodné celé těleso E rozdělit na dvě části E_1 a E_2, které jsou navzájem zrcadlovými obrazy podle roviny $x = y$ (tj. $\varphi = \frac{\pi}{4}$). Těm budou pak odpovídat oblasti parametrizací U_1 a U_2. Jak je určit:

Pro cylindrické souřadnice

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad z = h$$

po dosazení do nerovností pro E máme

$$r^2 + h^2 \leq 2, \quad 0 \leq r\cos\varphi \leq 1, \quad 0 \leq r\sin\varphi \leq 1, \quad h \geq 0 \;.$$

Oblasti parametrizace U_1 a U_2 tak budou

$$U_1: \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\varphi} \quad \& \quad 0 \leq h \leq \sqrt{2 - r^2}$$

$$U_2: \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin\varphi} \quad \& \quad 0 \leq h \leq \sqrt{2 - r^2}$$

Pak dostáváme

$$J = \iiint\limits_E x^2 + y^2 \;\mathrm{d}V = \iiint\limits_{E_1} x^2 + y^2 \;\mathrm{d}V + \iiint\limits_{E_2} x^2 + y^2 \;\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint\limits_{U_1} r^2 \cdot r \;\mathrm{d}h \;\mathrm{d}r \;\mathrm{d}\varphi + \iiint\limits_{U_2} r^2 \cdot r \;\mathrm{d}h \;\mathrm{d}r \;\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \int_0^{\sqrt{2-r^2}} r^3 \;\mathrm{d}h \;\mathrm{d}r \;\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \int_0^{\sqrt{2-r^2}} r^3 \;\mathrm{d}h \;\mathrm{d}r \;\mathrm{d}\varphi$$

Výpočet pak bude trochu delší. Ulehčíme si ho tím, že ze symetrie E i hustoty plyne, že momenty setrvačnosti těles E_1 a E_2 budou stejné. Tedy

$$J = 2\iiint\limits_{E_1} x^2+y^2 \ \mathrm{d}V = 2\iiint\limits_{U_1} r^3 \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\int\limits_0^{\sqrt{2-r^2}} r^3 \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} 2r^3\sqrt{2-r^2} \ \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \left\{ \begin{smallmatrix} u=2-r^2 \\ du=-2rdr \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int_2^{2-\frac{1}{\cos^2\varphi}=1-\mathrm{tg}^2\varphi}(u-2)\sqrt{u} \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_2^{1-\mathrm{tg}^2\varphi} u^{3/2}-2u^{1/2} \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\tfrac{2}{5}u^{5/2}-\tfrac{4}{3}u^{3/2}\right]_2^{1-\mathrm{tg}^2\varphi} \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{5}\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi}\right)^3 \ d\varphi = \left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{tg}\varphi=\sin\alpha \\ (1+\mathrm{tg}^2\varphi)d\varphi=\cos\alpha d\alpha \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2}}{15} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{5}\cos^6\alpha - \frac{4}{3}\cos^4\alpha\right)\frac{1}{1+\sin^2\alpha} \ d\alpha = \cdots =$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2}}{15} + \left(2\sqrt{2}-\frac{43}{16}\right)\frac{2\pi}{5} - \left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)\frac{4\pi}{3} = \left(\frac{71}{120}-\sqrt{2}\frac{4}{15}\right)\pi \doteq 0.674$$

kde jsme jednotlivě spočítali tyto integrály:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2\alpha)^2}{1+\sin^2\alpha} \ d\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\big(2-(1+\sin^2\alpha)\big)^2}{1+\sin^2\alpha} \ d\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{1+\sin^2\alpha} - 4 + 1 + \sin^2\alpha \ d\alpha =$$

$$= -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha = \left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{tg}\alpha=t \\ \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}=dt \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{5\pi}{4} + \int\limits_0^{\infty}\frac{4}{2t^2+1} \ dt =$$

$$= -\frac{5\pi}{4} + \left[\frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}t)\right]_0^{\infty} = \left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)\pi$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha} \ d\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\alpha\big(2-(1+\sin^2\alpha)\big)}{1+\sin^2\alpha} \ d\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^4\alpha}{1+\sin^2\alpha} - \cos^4\alpha \ d\alpha =$$

$$= \left(2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)\pi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)d\alpha = \left(2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)\pi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha d\alpha + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\sin^2\alpha \ d\alpha =$$

$$= \left(2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{4} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2\alpha)}{4} \ d\alpha = \left(2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16} = \left(2\sqrt{2}-\frac{43}{16}\right)\pi$$

9.5 (cylindrické souřadnice)

Určete hmotnost tělesa E omezeného plochami $x^2+z^2=1$, $x+\frac{y}{2}+z=2$ a prostorem $x,y,z\geq 0$. Hustota tělesa je $\varrho(x,y,z)=|y|$.

Řešení:
Těleso E je část válce seříznuta šikmo rovinou $x+\frac{y}{2}+z=2$ a ležící v části prostoru $x,y,z\geq 0$. Tedy:

$$E: \quad x^2+z^2\leq 1, \quad x\geq 0, \quad z\geq 0, \quad 0\leq y\leq 4-2x-2z.$$

Použijeme proto cylindrické souřadnice ve tvaru

$$\Phi: \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & h \\ z & = & r\sin\varphi \end{array}$$

s absolutní hodnotou jakobiánu opět rovnou r.

Po dosazení této parametrizace do podmínek pro E a především pomocí geometrické představy E získáme oblast U parametrizace množiny E jako:

$$U: \quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0\leq r\leq 1 \quad \& \quad 0\leq h\leq 4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi)\ .$$

Pak můžeme psát

$$\text{hmotnost}(E)=\iiint\limits_E \varrho(x,y,z)\ dV=\iiint\limits_E |y|\ dV=\iiint\limits_U hr\ d\varphi\ dh\ dr=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi)} hr\ dh\ dr\ d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cdot\frac{\left(4-2r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)^2}{2}\ dr\ d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 8r-8r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)+2r^3(1+2\cos\varphi\sin\varphi)\ dr\ d\varphi=$$

$$=\underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\ d\varphi\right)}_{=4\pi}\cdot\underbrace{\left(\int_0^1 r\ dr\right)}_{=\frac{1}{2}}-\underbrace{\left(\int_0^1 8r^2\ dr\right)}_{\frac{8}{3}}\cdot\underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi+\sin\varphi\ d\varphi\right)}_{=2}+\underbrace{\left(\int_0^1 2r^3\ dr\right)}_{\frac{2}{4}}\cdot\underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\sin(2\varphi)\ d\varphi\right)}_{=\frac{\pi}{2}+1}=$$

$$=\frac{27\pi-58}{12}$$

Sférické souřadnice mají předpis:

$$\Psi: \begin{array}{ccc} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

kde $(r,\varphi,\vartheta)\in\langle 0,+\infty)\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle$.

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi=\Phi_2\circ\Phi_1$$

$$\Phi_2: \begin{array}{ccc} x & = & \tilde r\cos\tilde\varphi \\ y & = & \tilde r\sin\tilde\varphi \\ z & = & \tilde z \end{array}\ , \quad \Phi_1: \begin{array}{ccc} \tilde r & = & r\sin\vartheta \\ \tilde\varphi & = & \varphi \\ \tilde z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det \Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r \sin \vartheta) \cdot r = r^2 \sin \vartheta.$$

9.6 (sférické souřadnice)

Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dzdxdy.$$

Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 3 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{9 - y^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{18 - x^2 - y^2}$$

neboli

$$E: \quad \underbrace{0 \le y \le 3 \quad \& \quad x^2 + y^2 \le 9 \quad \& \quad 0 \le x}_{\text{průmět } E \text{ do roviny } xy \text{ (čtvrtkruh)}} \quad \& \quad \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2} \le z}_{\text{kužel}} \quad \& \quad \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \le 18}_{\text{koule}}$$

Podíváme se, kde plášť kuželu protne se sférou, tj. kdy nastává $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 18$. Po dosazení dostaneme

$$18 = x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 2(x^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 9$$

Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x & = & (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y & = & (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z & = & r \cos \vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{18} \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\ .$$

Tuto oblast můžeme získat i po dosazení parametrizace do podmínek E, tj.

$$E: \quad 0 \le r \sin \vartheta \sin \varphi \quad \& \quad r^2 \sin^2 \vartheta \le 9 \quad \& \quad 0 \le r \sin \vartheta \cos \varphi \quad \& \quad r|\sin \vartheta| \le r \cos \vartheta \quad \& \quad r^2 \le 18$$

odkud máme např. $r^2 \le \min\{\frac{9}{\sin^2 \vartheta}, 18\} = 18$ protoze

$$18 \le \frac{9}{\sin^2 \vartheta} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 \vartheta \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |\sin \vartheta| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

což je právě pro $\vartheta \in \langle 0,\ \frac{\pi}{4} \rangle$ splněno. Tento postup je ale náročnější než získat totéž z náčrtu.

Můžeme tedy psát

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dzdxdy = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2 + y^2 + z^2)\ dV =$$

$$= \iiint_U r^2 \cdot r^2 |\sin\vartheta|\ dV = \int_0^{\sqrt{18}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi\ dr\ =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{18}} r^4\ \mathrm{d}r \right)}_{=\frac{18^2\sqrt{18}}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}\varphi \right)}_{=\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta \right)}_{=1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\cdot 3^5}{5}\pi(\sqrt{2}-1)\ .$$

9.7 (sférické souřadnice)

Určete hmotnost tělesa

$$E:\quad x^2+y^2+z^2 \le 1 \quad \& \quad z \ge \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\sigma(x,y,z) = x^2+y^2$.

Řešení:

Těleso E je průnikem koule a kužele, jehož špička je ve středu koule. Parametrizace pomocí sférických souřadnic pak bude

$$U:\quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$$

Hmotnost je:

$$m = \iiint_{E=\Psi(U)} x^2+y^2\ dV = \iiint_U r^2 \sin^2\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta\ dV = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= \left(\int_0^1 r^4\ dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta}\ d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi \right) = \left\{ \begin{array}{c} -\cos\vartheta = t \\ \sin\vartheta\ d\vartheta = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{5} \int_{-1}^{0} 1-t^2\ dt = \frac{2\pi}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{15}$$