

## 10. cvičení z Matematické analýzy 2

21. - 25. dubna 2025

**10.1** Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx$$

**Řešení:** zde.

**10.2** Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz \, dy \, dx$$

**Řešení:** zde.

**10.3** Vypočtěte

$$\iiint_E z^2 \, dV,$$

kde  $E$  je ohraničena plochami  $y = x^2$ ,  $z = 0$ ,  $y + z = 1$ .

**Řešení:** zde.

**10.4** Vypočtěte

$$\iiint_E y \, dV,$$

kde  $E$  je ohraničeno shora rovinou  $z = x + 2y$  a leží nad oblastí v rovině  $z = 0$  ohraničené křivkami  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ .

**Řešení:** zde.

**10.5** Zapište integrál pomocí cylindrických souřadnic a pak jej spočítejte:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy^2 z \, dz \, dx \, dy.$$

**Řešení:** zde.

**10.6** Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

(a)

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{9-x^2-z^2}} y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dy \, dz \, dx,$$

(b)

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy.$$

**Řešení:** (a). Část (b) se udělá obdobně jako zde.

**10.7** Vypočítejte těžiště tělesa

$$E : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \& \quad z \cdot \tan(\alpha_0) \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

s hustotou  $\sigma(x, y, z) = 1$ , kde  $R > 0$  a  $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  jsou parametry.

**Řešení:** zde.

**10.8** Spočítejte

$$\iiint_E x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV$$

kde

$$E : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \quad \& \quad z \geq 0.$$

**Řešení:** zde.

**10.9** Vypočítejte těžiště tělesa

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \& \quad x, y, z \geq 0,$$

s hustotou  $\sigma = 1$ , kde  $a, b, c > 0$  jsou parametry.

**Řešení:** zde.

**10.10** Nalezněte parametrizaci křivky, která vznikne:

(a) průnikem válce  $x^2 + y^2 = 2x$  a kužele  $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ .

(b) průnikem válce  $x^2 + y^2 = x$  a polosféry  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .

(c) průnikem sféry  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  a roviny  $x + y + z = 1$ .

**Řešení:**

(a), (b).

(c) Křivka je prostorová kružnice. Přestože křivka leží na sféře, není vhodné vzít sférické souřadnice, alespoň ne v klasickém tvaru. Lépe to půjde s válcovými souřadnicemi.

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

které dosadíme do rovnic křivky. Dostaneme

$$\varrho^2 + h^2 = 1, \quad \varrho(\cos \varphi + \sin \varphi) + h = 1$$

Vyjádřením  $h = 1 - \varrho(\cos \varphi + \sin \varphi)$  a dosazením do první rovnice máme

$$\varrho^2 + (1 - \varrho(\cos \varphi + \sin \varphi))^2 = 1$$

$$\varrho^2(2 + 2 \cos \varphi \sin \varphi) - 2\varrho(\cos \varphi + \sin \varphi) = 0$$

Případ  $\varrho = 0$  odpovídá bodu  $(0, 0, 1)$ . Pro případ  $\varrho \neq 0$  tedy máme

$$\varrho = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \sin \varphi}$$

kde výraz  $1 + \cos \varphi \sin \varphi = 1 + \frac{\sin 2\varphi}{2} > 0$  pro všechna  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Současně má být  $\varrho \geq 0$  a tedy

$$0 \leq \cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) .$$

Parametr  $\varphi$  bereme z intervalu délky  $2\pi$  (jinak by body byly vícekrát, až na konečně mnoho výjimek). Abychom současně splnili podmínku  $\sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \geq 0$  vezmeme si  $\varphi \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ . Pro krajní hodnoty (a pouze pro ně), tj.  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  a  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$  je  $\varrho = 0$ .

Celkově tedy dostáváme parametrizaci

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \sin \varphi} \cos \varphi \\ y(\varphi) &= \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \sin \varphi} \sin \varphi \\ z(\varphi) &= 1 - \frac{(\cos \varphi + \sin \varphi)^2}{1 + \cos \varphi \sin \varphi} = -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \sin \varphi} \end{aligned}$$

pro  $\varphi \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ .

Jiný způsob:

Dosadíme  $z = 1 - x - y$  do rovnice sféry. Máme pak

$$x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$$

a úpravou doplněním na čtverec dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \left( x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = \left( x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \left( x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( y - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

tedy

$$1 = 12 \underbrace{\left( x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}_{=x'^2} + 9 \underbrace{\left( y - \frac{1}{3} \right)^2}_{=y'^2}$$

. V nových souřadnicích máme rovnici

$$12(x')^2 + 9(y')^2 = 1$$

což je elipsa s parametrizací

$$x' = \frac{1}{\sqrt{12}} \cos \alpha$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{9}} \sin \alpha$$

pro  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

Ted' vyjádříme  $x$  a  $y$  pomocí  $x'$  a  $y'$ :

$$\begin{aligned} x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} &= x' \\ y - \frac{1}{3} &= y' \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= x' - \frac{y'}{2} + \frac{1}{3} \\ y &= y' + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Celkem máme

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \alpha - \frac{1}{6} \sin \alpha + \frac{1}{3} \\ y(\alpha) &= \frac{1}{3} \sin \alpha + \frac{1}{3} \\ z(\alpha) &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \alpha - \frac{1}{6} \sin \alpha + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

pro  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .