

11. cvičení z Matematické analýzy 2

28. dubna - 2. května 2025

11.1 (sférické souřadnice)

Určete moment setrvačnosti J tělesa

$$E : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} .$$

s hustotou $\sigma(x, y, z) = 1$ vzhledem k ose otáčení z , tj. integral

$$J = \iiint_E x^2 + y^2 \, dV .$$

Řešení:

Těleso E je horní polokoule s vyjmutým kuželem, jehož špička je ve středu koule. Parametrizace pomocí sférických souřadnic je

$$\Psi : \quad \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

s oblastí parametrizace

$$U : \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} .$$

Tedy

$$\begin{aligned} \iiint_E x^2 + y^2 \, dV &= \iiint_U r^2 \sin^2 \vartheta \cdot r^2 \sin \vartheta \, dV = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \\ &= \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{12} \cdot 2\pi = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \end{aligned}$$

protože

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos \vartheta \\ dt = -\sin \vartheta \, d\vartheta \end{array} \right\} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 t^2 - 1 \, dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - t^2 \, dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{5\sqrt{2}}{12} . \end{aligned}$$

11.2 (sférické souřadnice)

Pomocí sférických souřadnic spočítejte:

$$\iiint_E z \, dV.$$

kde

$$E : x^2 + y^2 + z^2 \leq 18, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0$$

Řešení:

Oblast integrace je průnik koule, kuželu a prvního oktantu (tj. oblasti $x, y, z \geq 0$). Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi : \begin{aligned} x &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

a oblast

$$U : \quad 0 \leq r \leq \sqrt{18} \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \iiint_{E=\Phi(U)} z \, dV &= \iiint_U r \cos \vartheta \cdot r^2 \sin \vartheta \, dV = \int_0^{\sqrt{18}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = \\ &= \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{18}} r^3 \, dr \right)}_{=\frac{18^2}{4}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\varphi \right)}_{=\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right)}_{=\frac{1}{4}} = \frac{81}{8} \pi \end{aligned}$$

protože

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin \vartheta \\ dt = \cos \vartheta \, d\vartheta \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t \, dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

11.3 (sférické souřadnice)

Spočítejte

$$\iiint_E x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} \, dV$$

kde

$$E : \quad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \quad \& \quad z \geq 0.$$

Řešení: zde.

11.4 (sférické souřadnice)

Určete hmotnost tělesa

$$E : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \& \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

s hustotou $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Všimněte si, že výsledný integrál, tj. $\iiint_E x^2 + y^2 dV$, popisuje také moment setrvačnosti tělesa E , které má konstantní hustotu 1.

Řešení: zde.

11.5 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_C f ds$, kde $f(x, y, z) = xe^{yz}$ a C je úsečka vedoucí z bodu $A = (0, 0, 0)$ do bodu $B = (1, 2, 3)$.

Řešení: zde.

11.6 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde C je horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 0)$.

Řešení: zde.

11.7 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_C 2xy dx - x^2 dy$$

kde C je část paraboly $x = 2y^2$ jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, 1)$.

Řešení: zde.

11.8 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_C y dx - x dy$$

kde C je asteroida určená parametrizací

$$\varphi: x = a \cos^3 t \quad \& \quad y = a \sin^3 t \quad \& \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientací danou touto parametrizací. (Asteroida je křivka daná rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

Řešení: zde.

11.9 (délka křivky)

Určete délku křivky C , která je grafem funkce $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle$.

Řešení: zde.

11.10 (délka křivky)

Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi: x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

Řešení: zde.