

12. cvičení z Matematické analýzy 2

5. - 9. května 2025

12.1 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde C se skládá postupně z křivek

- C_1 : horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 0)$;
- C_2 : úsečka jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(-1, 2)$.

Řešení: zde.

12.2 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_C (x + y) ds$, kde C se skládá postupně z křivek

- C_1 : levá polovina kružnice o poloměru 1 se středem v $(0, 1)$ jdoucí v záporném smyslu z bodu $(0, 0)$ do bodu $(0, 2)$;
- C_2 : úsečka jdoucí z bodu $(0, 2)$ do bodu $(1, 0)$.

Řešení: zde.

12.3 (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte $\int_C (x - y)^2 ds$, kde C je horní část kružnice $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$.

Řešení:

Kružnice splňuje rovnici $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, proto pro parametrizaci použijeme posunuté polární souřadnice:

$$\varphi: \quad x = 1 + \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{pro} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$\varphi'(t): \quad x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t \quad \text{a} \quad \|\varphi_1'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1.$$

Takže

$$\begin{aligned} \int_C (x - y)^2 ds &= \int_0^\pi (x - y)_{|\varphi(t)}^2 \cdot \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^\pi (1 + \cos t - \sin t)^2 dt = \\ &= \int_0^\pi 1 + \cos^2 t + \sin^2 t + 2 \cos t - 2 \sin t - 2 \cos t \sin t dt = \int_0^\pi 2 + 2 \cos t - 2 \sin t - \sin 2t dt = \\ &= 2\pi + 0 - 4 - 0 = 2\pi - 4. \end{aligned}$$

12.4 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_C (2a - y) dx + x dy$$

pro oblouk cykloidy $\mathcal{C}$ dané parametrizací

$$\varphi: \quad x = a(t - \sin t) \quad \& \quad y = a(1 - \cos t) \quad \& \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

s parametrem $a > 0$ a orientací danou touto parametrizací. (Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici s poloměrem a , která se valí bez tření po přímce.).

Řešení: zde.

12.5 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \geq 0$$

je křivka s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení: zde.

12.6 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad x + z = 1$$

je křivka s kladnou orientací při pohledu shora.

Řešení: zde.

12.7 (konzervativní pole, potenciál)

Určete hodnotu parametru α tak, aby následující pole byla konzervativní. Najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B .

(a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, \quad y^2 + \alpha x, \quad ze^z)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 0)$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\alpha}{z}, \quad -\frac{3}{z}, \quad \frac{3y-x}{z^2}\right)$, $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 2)$.

Řešení: (a), (b).

12.8 (plošný integrál z funkce)

Spočítejte

(a)

$$\iint_M z \, dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 2$ vymezená rovinou $z = 0$ a plochou $z = x^2 + (y - 1)^2$.

(b)

$$\iint_M x^2 z + y^2 z \, dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení: (a), (b).