

13. cvičení z Matematické analýzy 2

12. - 16. května 2025

13.1 (konzervativní pole, potenciál)

Nalezněte funkci $g(x)$ tak, aby vektorové pole

$$\vec{F} = (y \sin x + yx \cos x + e^y, \quad g(x) + xe^y)$$

bylo potenciální na celém $\mathbb{R}^2$ a $g(0) = 0$.

Řešení: zde.

13.2 (konzervativní pole, potenciál)

Pro které hodnoty a, b je pole $\vec{F} = (-xy + x, ax^2 + by)$ potenciální? Nalezněte jeho potenciál.

Řešení:

Pole je definováno na $\mathbb{R}^2$. Nutná podmínka pro potenciální pole $\vec{F}$ je $\frac{\partial F_2}{\partial x}(a) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(a)$ pro všechna $a \in \mathbb{R}^2$. Tedy

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial(ax^2 + by)}{\partial x} = 2ax$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(-xy + x)}{\partial y} = -x$$

proto $2ax = -x$ a to platí právě když $a = -\frac{1}{2}$. Pro tuto volbu najdeme potenciál, tedy funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = -xy + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = -\frac{x^2}{2} + by.$$

Z první rovnice vyplývá, že

$$f(x, y) = \int -xy + x \, dx = \frac{x^2}{2}(1 - y) + A(y)$$

což dosadíme do druhé rovnice

$$-\frac{x^2}{2} + by = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2}(1 - y) + A(y) \right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\partial A(y)}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial A(y)}{\partial y} = by$$

Proto máme $A(y) = \int by \, dy = b\frac{y^2}{2} + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Takže potenciál pro $a = -\frac{1}{2}$ je

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2}(1 - y) + b\frac{y^2}{2} + C.$$

13.3 (konzervativní pole, potenciál)

Určete potenciál pole

$$\vec{F}(x, y, z) = (1 + yz \cos xy, \quad xz \cos xy, \quad -2z + \sin xy) .$$

Řešení:

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 1 + yz \cos xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xz \cos xy \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -2z + \sin xy .\end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int (1 + yz \cos xy) \, dx = x + z \sin xy + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z . Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$xz \cos xy = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x + z \sin xy + C(y, z)) = xz \cos xy + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = 0.$$

Protože levá strana nezávisí na proměnné x , nesmí se tato proměnná objevit ani na druhé straně rovnice - což nastává a tedy můžeme s řešením pokračovat. Dostáváme

$$C(y, z) = \int 0 \, dy = D(z),$$

kde $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá už pouze na z . Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = x + z \sin xy + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$-2z + \sin xy = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x + z \sin xy + D(z)) = \sin xy + \frac{\partial D}{\partial z}(z)$$

tedy

$$\frac{\partial D}{\partial z}(z) = -2z .$$

Opět - pravá strana nezávisí na proměnných x, y , a tudíž se nesmí tyto proměnné objevit ani na druhé straně rovnice - což nastává a tedy můžeme s řešením pokračovat. Takže

$$D(z) = \int -2z \, dz = -z^2 + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = x + z \sin xy - z^2 + K.$$

13.4 (plošný integrál z funkce)

Spočítejte

$$\iint_M (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

kde M je plášť kužele $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 1$.**Řešení:**Plochu M si můžeme zparametrizovat jako graf funkce $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) \end{aligned}$$

Tyto vztahy neplatí jen pro $(x, y) = (0, 0)$, ale to je vzhledem k dvojnému integrálu nepodstatné.

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

Takže

$$\begin{aligned} \iint_M (x^2 + y^2 + z^2) dS &= \iint_U (x^2 + y^2 + z^2(x, y)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| dx dy = \iint_U 2(x^2 + y^2)\sqrt{2} dx dy \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\sqrt{2}r^2 \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

13.5 (plošný integrál z funkce)

Spočítejte

(a)

$$\iint_M z dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 2$ vymezená rovinou $z = 0$ a plochou $z = x^2 + (y - 1)^2$.

(b)

$$\iint_M x + z^2 y dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 3$ ležící v prvním oktantu.**Řešení:** (a), (b).

13.6 (plošný integrál z vektorového pole - tok)

Spočítejte

$$\int_M \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (z, -x, 1)$ a plocha $M: 2x + 2y + z = 1, x, y, z \geq 0$ je orientovaná směrem vzhůru.

Řešení:

Plocha M je trojúhelník. Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 1 - 2x - 2y$, tedy

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1 - 2x - 2y)$$

pomocí množiny

$$U: 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \ \& \ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} - x.$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, -2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, -2)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (2, 2, 1).$$

Tento vektorový součin má správný směr jako zadaná orientace M takže máme

$$\begin{aligned} \int_M \vec{F} \cdot d\vec{S} &= + \iint_U (\vec{F} \circ \Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dS = \\ &= \iint_U (1 - 2x - 2y, -x, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dS = \iint_U (3 - 6x - 4y) dS = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}-x} (3 - 6x - 4y) dy dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3}{2}(1 - 2x)(1 - 2x) - 2 \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)^2 dx = -\frac{1}{6} [(1 - 2x)^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

13.7 (plošný integrál z vektorového pole - tok)

Spočítejte

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x, -z, y)$ a M je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v 1. oktantu s orientací směrem do počátku.
 (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2, yz)$ a M je na plášti kuželu $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$ pro $0 \leq z \leq 1$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení: (a), (b).

13.8 (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly

$$\vec{F}(x, y) = (2xy^3, 4x^2y^2)$$

vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení: zde.

13.9 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení: zde.

13.10 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál z vektorového pole

$$\vec{F} = (xy^2, 2x^2y)$$

podél kladně orientované hranice $\mathcal{C}$ trojúhelníku M s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 2)$ a $(2, 4)$.

Řešení: zde.

13.11 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte obsah plochy v $\mathbb{R}^2$ omezené cykloidou $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a osou x .

Řešení: zde.

13.12 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení: zde.

13.13 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete tok pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xz^3, (z - 1)^2)$ povrchem tělesa E ohraničeného plochami $x^2 + y^2 = 16$, $z = 1$ a $z = 5$. Povrch má vnější orientaci.

Řešení: zde.

13.14 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete tok pole $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2, y + z)$ povrchem tělesa E ohraničeného plochami $x^2 + y^2 = 4$, $z = x$ a $z = 4$. Povrch má vnější orientaci.

Řešení: zde.

13.15 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty pro vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$$

určete $\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$ kde plocha je $M : x + y + z = 1$ & $x, y, z \geq 0$ a je orientovaná směrem vzhůru.

Řešení: zde.

13.16 (Stokesova věta)

Spočítejte práci síly

$$\vec{F}(x, y, z) = ((x+1)^x + z^2)\vec{i} + ((y+1)^y + x^2)\vec{j} + ((z+1)^z + y^2)\vec{k}$$

vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu. Křivka $\mathcal{C}$ daná okrajem této plochy je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora (přesněji: ve směru daném posloupností bodů $(2, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 2) \rightarrow (0, 2, 0)$).

Řešení: zde.

13.17 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, xy)$$

a křivka $\mathcal{C}$ je průnikem ploch $z = x^2 + y^2$ a $x^2 + y^2 = x$. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována kladně při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy , bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení: zde.