

14. cvičení z Matematické analýzy 2

19. - 23. května 2025

14.1 (plošný integrál - tok)

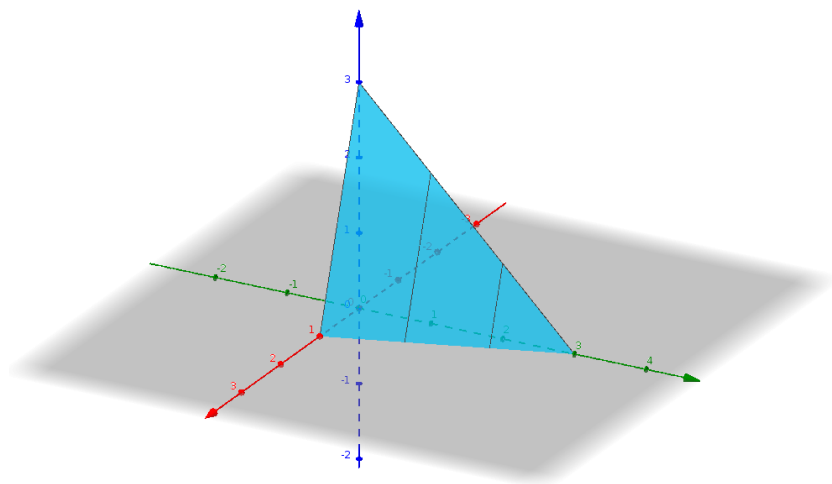
Určete tok

$$\int_M \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

plochou $M : 3x + y + z = 3$, $x, y, z \geq 0$ orientovanou směrem vzhůru, kde $\vec{F}(x, y, z) = (1, z, x)$ a

Řešení:

Plocha M je trojúhelník.



Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 3 - 3x - y$, tedy

$$\Phi(x, y) = (x, y, 3 - 3x - y)$$

pomocí množiny

$$U : 0 \leq x \leq 1 \text{ \& } 0 \leq y \leq 3 - 3x.$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, -3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, -1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (3, 1, 1).$$

Tento vektorový součin má směr zadané orientace $\vec{n}$, takže při dosazení za parametrizaci máme znaménko $+$:

$$\int_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = + \iint_U (\vec{F} \circ \Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dS =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_U (1, \underbrace{3-3x-y}_{=z}, x) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dS = \iint_U 6 - 2x - y dS = \int_0^1 \int_0^{3(1-x)} (6 - 2x - y) dy dx = \\
&= \int_0^1 6(3-x)(1-x) - \frac{9}{2}(1-x)^2 dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 - 15x + \frac{27}{2} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} - 15 \cdot \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = \frac{13}{2}.
\end{aligned}$$

14.2 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde křivka C je hranicí plochy $M : z = x^2 + y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ a pole je

$$\vec{F} = (x, -z, xy).$$

Křivka C je orientována kladně při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy , bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení: zde.

14.3 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a C je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy , bude mít tento její obraz zápornou orientaci).

Řešení: zde.

14.4 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty vypočtete integrál pole $\vec{F}$ podél orientované křivky C , kde

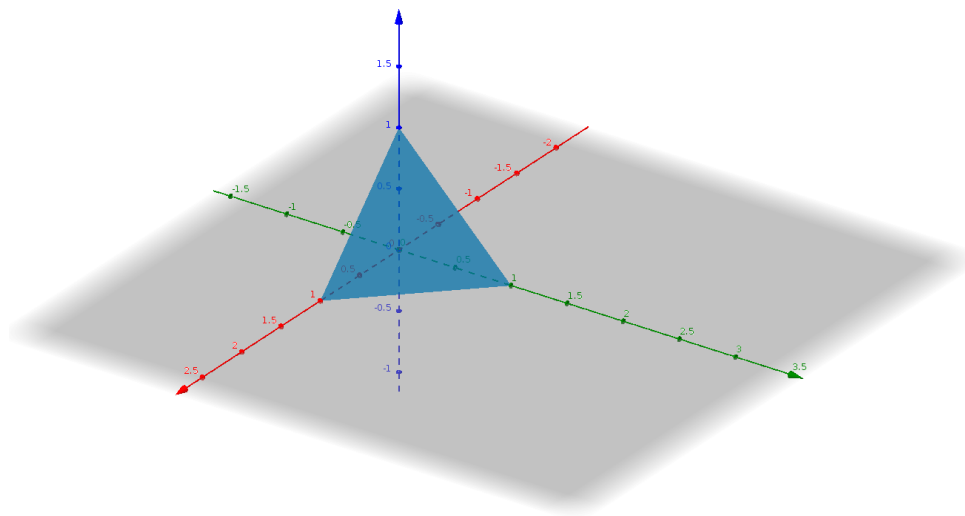
$$\vec{F}(x, y, z) = (2z + x, y - z, x + y)$$

a C je obvod trojúhelníka s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ orientovaný podle uvedeného pořadí vrcholů.

Řešení:

Křivka C je obvod plochy trojúhelníka

$$M : x + y + z = 1, x, y, z \geq 0.$$



Aby byly orientace okraje C a plochy M v souladu, je potřeba plochu M orientovat směrem vzhůru, tj. třetí složka normálového pole je kladná. Dále máme

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z+x & y-z & x+y \end{vmatrix} = (1 - (-1), -(1 - 2), 0 - 0) = (2, 1, 0) .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 1 - x - y$, tedy

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

pomocí množiny

$$U : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 1 - x .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, \quad 0, \quad -1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, \quad 1, \quad -1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (1, 1, 1).$$

Tento vektorový součin má správný směr jako orientace plochy M , takže při dosazení za parametrizaci v plošném integrálu použijeme znaménko $+$. Máme

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \iint_{M=\Phi(U)} \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = + \iint_U (\text{rot}(\vec{F}) \circ \Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dS = \\ &= \iint_U (2, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dS = \iint_U 3 dS = \int_0^1 \int_0^{1-x} 3 dy dx = \\ &= 3 \int_0^1 1 - x dx = 3 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

14.5 Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad a najděte jejich součet na vnitřku intervalu konvergence (tj. vyjádřete je pomocí známých elementárních funkcí):

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} x^{2n+1}$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + (-2)^n) x^n$$

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)}$$

Řešení: (a), (b), (c), (d).

14.6 Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad a najděte jejich součet na vnitřku intervalu konvergence (tj. vyjádřete je pomocí známých elementárních funkcí):

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (x+1)^{n+1}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (5^n + n) x^{2n}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+3}}{n}$$

Řešení:

(a).

(b) *Poloměr konvergence:* Využijeme třeba podílové kritérium:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2(n+1) + 1|}{|2n+1|} = 1$$

Poloměr konvergence je tedy $R = 1$.

Součet: Řadu rozepíšeme. Pro $|x| < 1$ platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

kde jednotlivé řady mají opět poloměr konvergence 1 (takže roztržení na součet opravdu platí) a sečteme je takto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Takže

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

pro $|x| < 1$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

(c) *Poloměr konvergence:* Využijeme třeba podílové kritérium. Pro $x \neq 0$ máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|5^{n+1} + n + 1| \cdot x^{2n+2}}{|5^n + n| \cdot x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \frac{\left| \frac{n+1}{5^{n+1}} + 1 \right|}{\left| \frac{n}{5^n} + 1 \right|} \cdot x^2 = 5x^2$$

Řada tedy konverguje pro $5x^2 < 1$ a diverguje pro $5x^2 > 1$. Ekvivalentně: řada konverguje pro $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ a diverguje pro $|x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Podle definice poloměru konvergence je tedy $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Součet: Řadu rozepíšeme. Pro $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} (5^n + n)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(5x^2)^n}_{y_1} + x^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \underbrace{(x^2)^{n-1}}_{y_2}$$

Uvedené řady mají (v proměnné x) postupně poloměry konvergence $R_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a $R_2 = 1$, které zjistíme podobně jako výše. Proto pro $|x| < \min\{R_1, R_2\} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ rozepsání na součet skutečně platí.

Stačí nyní sečíst následující řady a vhodně dosadit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}, \quad |y| < 1 \quad \xrightarrow{y=5x^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (5x^2)^n = \frac{1}{1-5x^2}, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \right)' = \left(\frac{1}{1-y} \right)' = \frac{1}{(1-y)^2}, \quad |y| < 1 \quad \xrightarrow{y=x^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(x^2)^{n-1} = \frac{1}{(1-x^2)^2}, \quad |x| < 1$$

Takže

$$\sum_{n=0}^{\infty} (5^n + n)x^{2n} = \frac{1}{1-5x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

pro $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

(d) *Poloměr konvergence:* Využijeme podílové kritérium. Pro $x \neq 0$ máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{2^{n+1} x^{n+4}}{n+1} \right|}{\left| \frac{2^n x^{n+3}}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2|x| \cdot \frac{n}{n+1} = 2|x|$$

Tedy pro $|x| < \frac{1}{2}$ řada konverguje a pro $|x| > \frac{1}{2}$ řada diverguje, takže poloměr konvergence je $R = \frac{1}{2}$.

Součet: Řadu si přepíšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+3}}{n} = x^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$$

Stačí tedy vyšetřit řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$ a do ní dosadit $y = 2x$. Poloměr konvergence řady (v proměnné y) snadno najdeme jako $R = 1$.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \int \frac{1}{1-y} dy = -\ln(1-y) + C.$$

Po dosazení $y = 0$ dostaneme $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$. Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+3}}{n} = x^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = x^3 \cdot (-\ln(1-2x))$$

pro $|x| < \frac{1}{2}$. (Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

14.7 Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad a najděte jejich součet na vnitřku intervalu konvergence (tj. vyjádřete je pomocí známých elementárních funkcí):

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$$

(b)

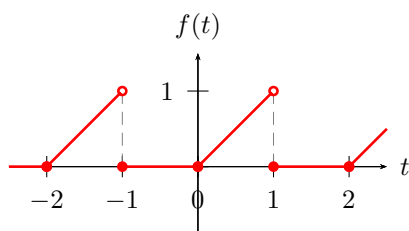
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n}$$

Řešení: (a), (b).

14.8 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} t & , t \in [0, 1), \\ 0 & , t \in [1, 2). \end{cases}$$

(tj. funkci s periodou $T = 2$) a určete její součet.

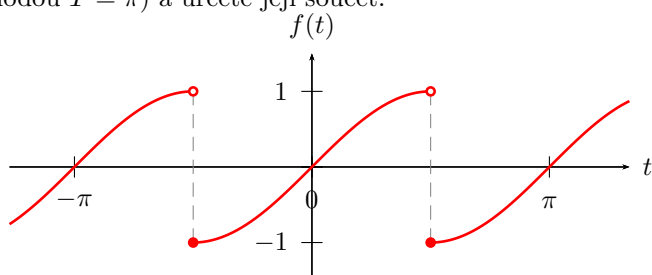


Řešení: zde.

14.9 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.

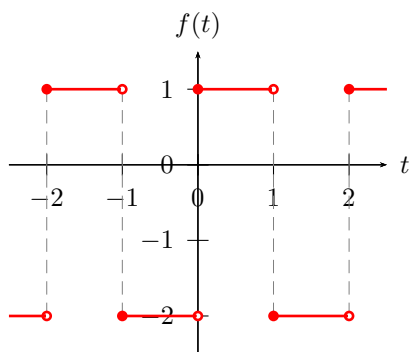


Řešení: zde.

14.10 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, 1), \\ -2 & , t \in [1, 2). \end{cases}$$

(tj. s periodou $T = 2$) a určete její součet.

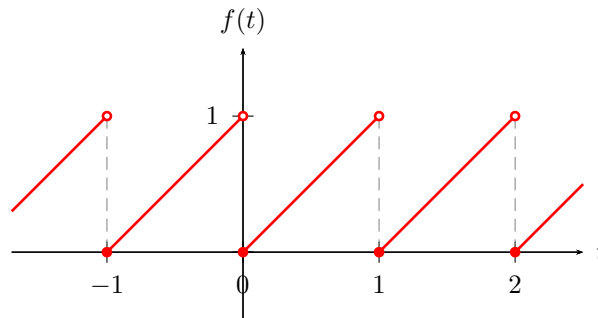


Řešení: zde.

14.11 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = t, \quad t \in [0, 1)$$

(tj. s periodou $T = 1$) a určete její součet.

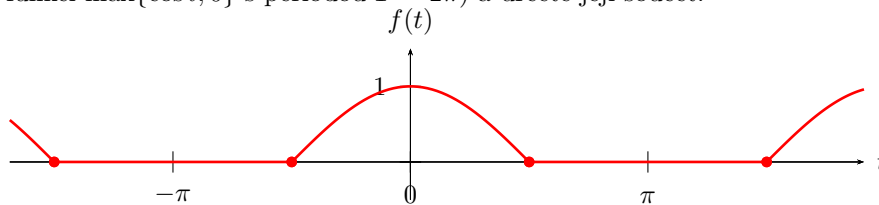


Řešení: zde.

14.12 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & , t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & , t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \end{cases}$$

(neboli funkci $\max\{\cos t, 0\}$ s periodou $T = 2\pi$) a určete její součet.

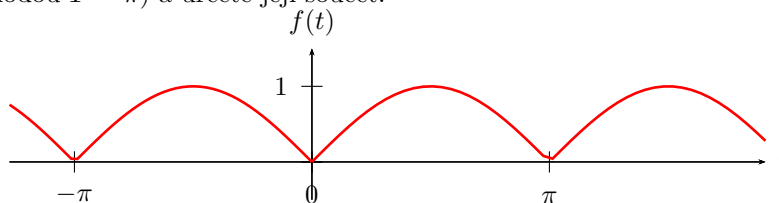


Řešení: zde.

14.13 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

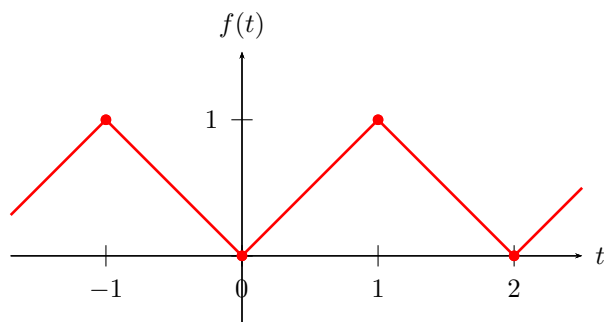
$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi)$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.



Řešení: zde.

14.14 Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = |t|$, $-1 \leq t < 1$.



Řešení: zde.