

2. cvičení z Matematické analýzy 2

24. - 28. února 2025

2.1 Pro následující funkce f načrtněte graf (a případně popište vrstevnice):

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

(c) $f(x, y) = x + \sin y$,

(d) $f(x, y) = x^2 + y$,

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2$,

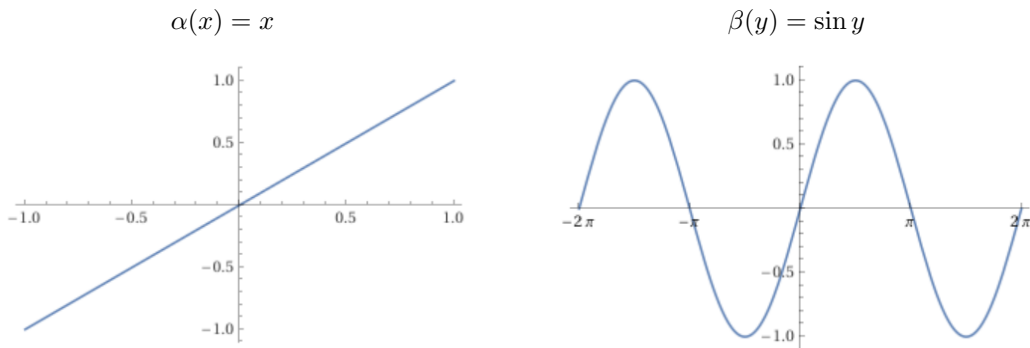
(f) $f(x, y) = xy$.

Řešení:

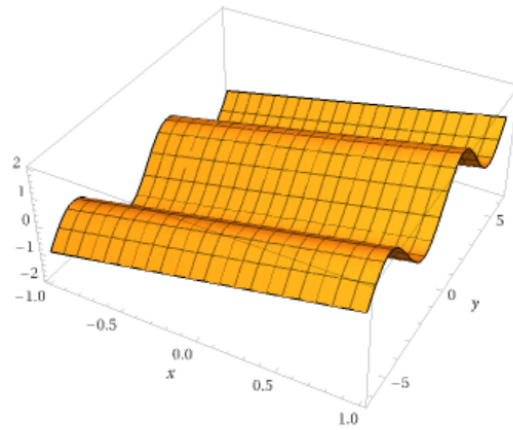
(a), (b), (e)+(f):zde.

Jestliže máme funkci tvaru $f(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$, kde $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce jedné proměnné, pak graf funkce f vznikne posouváním grafu funkce $\alpha(x)$ podél osy y o hodnotu $\beta(y)$.

(c)

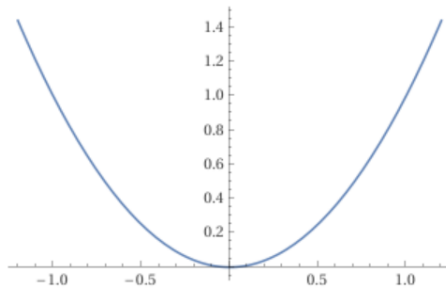


$$f(x, y) = x + \sin y$$

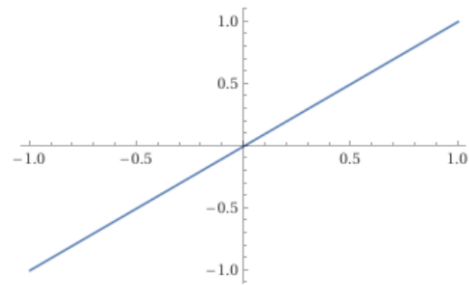


(d)

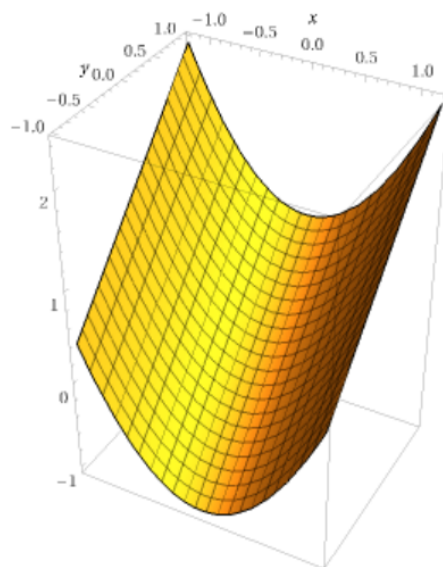
$$\alpha(x) = x^2$$

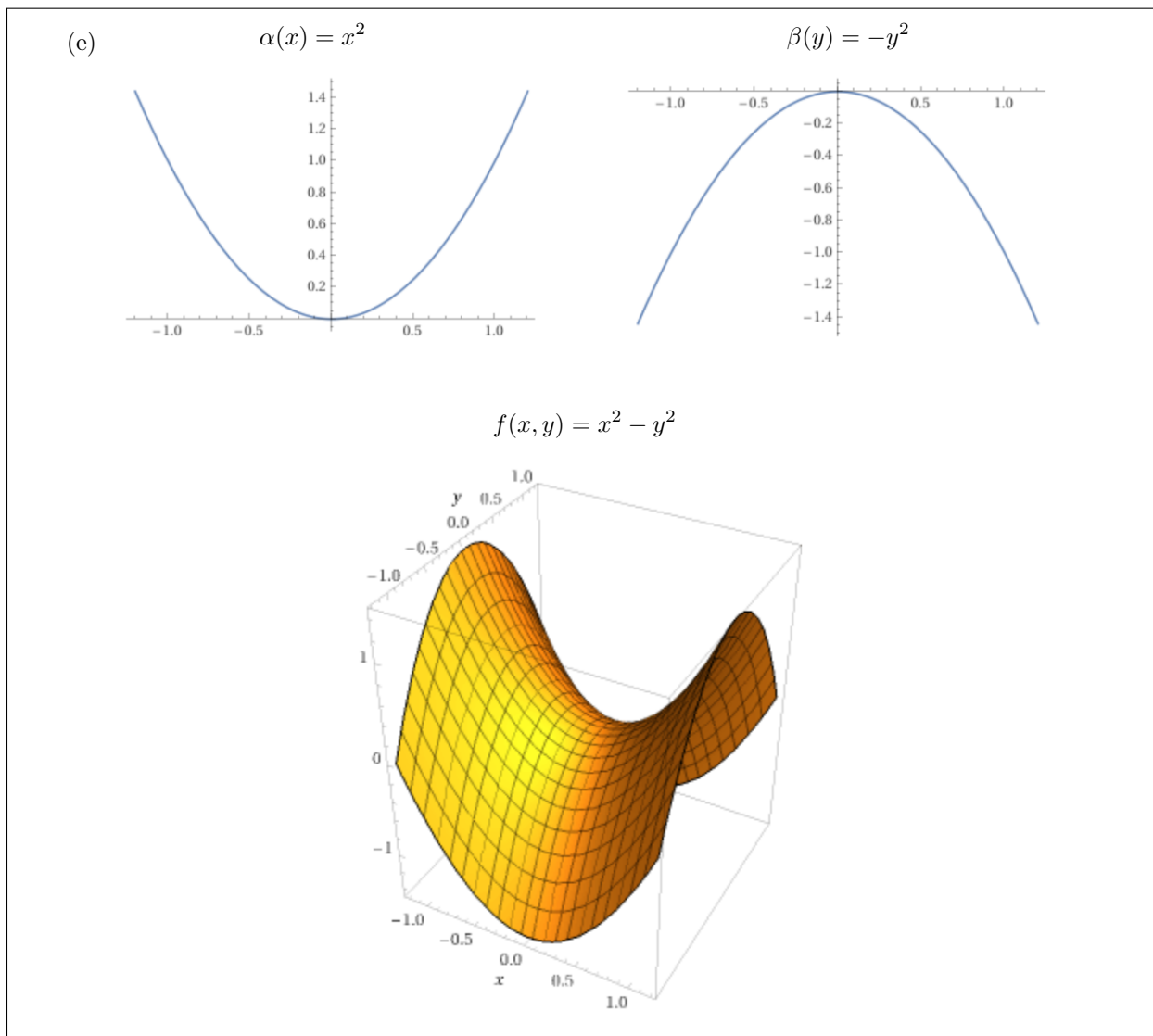


$$\beta(y) = y$$



$$f(x, y) = x^2 + y$$





2.2 Pro následující funkce f najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence:

(a) $f(x, y) = \sqrt{y^2 + x} \cdot \sin \frac{y}{x},$

(b) $f(x, y) = x^2 y + \ln(x + 2y).$

Řešení: (a), (b).

2.3 Pro následující funkce f najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^3 y + 1} \cdot \cos \frac{x}{y},$

(b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\ln(x - \sin y)}.$

Řešení:

(a) Definiční obor je $D(f) : x^3y + 1 \geq 0 \wedge y \neq 0$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : xy^3 + 1 > 0 \wedge y \neq 0$. Ve všech bodech vnitřku můžeme použít pravidla o derivování součinu funkcí, složené funkce atd. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^3y+1} \cdot \cos \frac{x}{y} \right) = \frac{3x^2y}{2\sqrt{x^3y+1}} \cdot \cos \frac{x}{y} + \sqrt{x^3y+1} \cdot \left(-\sin \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^3y+1} \cdot \cos \frac{x}{y} \right) = \frac{x^3}{2\sqrt{x^3y+1}} \cdot \cos \frac{x}{y} + \sqrt{x^3y+1} \cdot \left(-\sin \frac{x}{y} \right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right)$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)^\circ$.

(b) Postupujeme podobně jako výše. Definiční obor je $D(f) : x^2 \geq y \wedge x > \sin y$. Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina $D(f)^\circ : x^2 > y \wedge x > \sin y$. Ve všech bodech vnitřku můžeme použít pravidla o derivování součinu funkcí, složené funkce atd. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{x^2-y}}{\ln(x-\sin y)} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}} \cdot \frac{1}{\ln(x-\sin y)} - \sqrt{x^2-y} \cdot \frac{1}{\ln^2(x-\sin y)} \cdot \frac{1}{x-\sin y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sqrt{x^2-y}}{\ln(x-\sin y)} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} \cdot \frac{1}{\ln(x-\sin y)} + \sqrt{x^2-y} \cdot \frac{1}{\ln^2(x-\sin y)} \cdot \frac{\cos y}{x-\sin y}$$

Obě parciální derivace evidentně existují na $D(f)^\circ$.

2.4 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce f spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$? Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení: zde.

2.5 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce f spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$? Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení: zde.

2.6 Je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nalezněte $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ ve všech směrech, ve kterých existuje. Je zobrazení $\vec{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ lineární? Je funkce f spojitá?

Řešení: zde.

2.7 Vypočítejte všechny parciálně derivace (1. řádu) funkce f a určete všechny body, ve kterých jsou spojitě, jestliže

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Řešení: zde.