3. cvičení z Matematické analýzy 2

3. - 7. března 2025

3.1 Vyšetřete existenci následujících limit:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5-y^5}{x^4+y^4}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{|x|^3+|y|^3}$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$

Řešení:

(a)

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^5-y^5}{x^4+y^4}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm 5, funkce v čitateli je polynom stupně 4. Tušíme tedy, že by čitatel převáží jmenovatele a limita by mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si proto nejdříve nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je skutečně $c = 0$. Teď ukážeme, že to limita je. K tomu stačí odhadnout funkci f jakoukoliv vhodnou funkci, která má za limitu nulu. Vzhledem k čitateli v f se bude hodit tento jednoduchý odhad:

$$|x|, |y| \leq \sqrt[4]{x^4+y^4}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \big|f(x,y) - \underbrace{c}_{=0}\big| \leq \frac{|x|^5+|y|^5}{x^4+y^4} \leq \frac{2\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+y^4}\right)^5}{x^4+y^4} = 2\cdot\left(|x|^4+|y|^4\right)^{\frac{5}{4}-1} = 2\cdot\sqrt[4]{x^4+y^4}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y)-c\big| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[4]{x^4+y^4} = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = \sqrt[4]{x^4+y^4}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (abs. hodnota, polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Můžeme postupovat i pomocí polárních souřadnic:

Body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq |f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - \underbrace{c}_{=0}| = \varrho\cdot\frac{|\cos^5\varphi - \sin^5\varphi|}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} \leq \varrho\cdot\frac{|\cos^5\varphi|+|\sin^5\varphi|}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} \leq \frac{2\varrho}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$$

Nyní bychom chtěli tento výraz odhadnout nějakou funkcí $g(\varrho)$ nezávisející na úhlu, která pro ϱ jdoucí k nule má limitu nula. Potřebujeme tedy omezit hodnotu $\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$ konstantou. Protože funkce $h(\varphi) = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi$ je spojitá a kladná na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, tak zde také nabývá svého kladného minima ε v nějakém bodě $\varphi_0 \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Tedy $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi \geq \varepsilon > 0$. A proto je $\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ a my máme odhad

$$0 \leq |f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - c| \leq \cdots \leq \frac{2\varrho}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \leq \frac{2\varrho}{\varepsilon} =: g(\varrho)$$

A protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = \lim\limits_{\varrho\to 0_+} \frac{2\varrho}{\varepsilon} = 0$ vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} = c = 0 \ .$$

Poznámka: Kromě eukleidovské normy existuji i jiné, tzv. p-normy pro $p \geq 1$ definované jako

$$\|\vec{v}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

pro $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$, a dokonce i ∞-norma, která je definovaná jako

$$\|\vec{v}\|_\infty := \lim_{p\to\infty} \|\vec{v}\|_p = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \ .$$

Všechny tyto normy jsou souměřitelné v tomto smyslu:
Pro libovolné $p, q \in \langle 1, \infty\rangle$ existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|\vec{v}\|_p \leq K \cdot \|\vec{v}\|_q$.

(d) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^4+y^4}{|x|^3+|y|^3}$ je

$$D(f): \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Budeme postupovat podobně jako výše a ukážeme, že limita je nulová. Použijeme odhad:

$$|x|, |y| \leq \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \big|f(x, y)\big| = \frac{|x|^4 + |y|^4}{|x|^3 + |y|^3} \leq \frac{2 \cdot \left(\sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}\right)^4}{|x|^3 + |y|^3} = 2 \cdot \left(|x|^3 + |y|^3\right)^{\frac{4}{3}-1} = 2 \cdot \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x, y) - c\big| \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3} \ = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x, y) = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$ je spojitá.
Dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

(d) Limita neexistuje - viz reseni.
Můžeme to ukázat i takto. Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$ je

$$D(f) : y \neq -x.$$

Pro přiblížení po ose x máme $f(x, 0) = x \xrightarrow{x\to 0} 0$.
Ted bychom chtěli najít jinou než nulovou limitu při nějakém přiblížení. Hledejme křivku

$$y(x) = x \cdot k(x)$$

kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce, aby platilo, že $(x, y(x)) \in D(f)$ a $y(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ a $f(x, y(x)) \xrightarrow{x\to 0} c$ pro nějaké $0 \neq c \in \mathbb{R}$.

Dosadíme předpis $y(x) = x \cdot k(x)$ do $f(x, y)$. Tedy

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{x^4 + (x \cdot k(x))^4}{x^3 + (x \cdot k(x))^3} = \frac{x}{1 + k(x)^3} \cdot (1 + k(x)^4)$$

Nyní položme

$$\frac{x}{1 + k(x)^3} = 1 \quad \text{tedy} \quad k(x) = \sqrt[3]{x - 1}\ .$$

Pak máme, že $y(x) = x\sqrt[3]{x-1} \neq -x$ pro $x \neq 0$, tudíž $(x, y(x)) \in D(f)$. A dále je $x\sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{x\to 0} 0$ a konečně

$$f\big(x, y(x)\big) = \cdots = 1 + \big(\sqrt[3]{x-1}\big)^4 \xrightarrow{x\to 0} 2$$

a to je jiná limita než 0, takže $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ neexistuje.

3.2 Pro funkci $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $a_0 = (2, 2)$ určete derivaci (tj. totální diferenciál), tečnou rovinu, derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Má graf funkce větší strmost, jestliže se vydáme ve směru určeném vektorem $\vec{w} = (0, 5)$ nebo ve směru určeném vektorem $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

Řešení: zde.

3.3 Pro funkci $f(x, y) = \ln(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete totální diferenciál, tečnou rovinu, derivaci ve směru $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ a přímku, která je kolmá ke grafu funkce v tomto bodě.

Řešení:
Pro $a_0 = (1, 1)$ máme

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y^2}{xy^2}, \frac{2xy}{xy^2}\right)|_{a_0} = \left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right)|_{a_0} = (1, 2)\ .$$

Existence $df(a_0)$ plyne ze spojitosti parciálních derivací na okolí a_0.

Tečná rovina je graf linearizace funkce f v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$. Má tedy rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 + (1,\ 2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = x - 1 + 2(y - 1)$$

což se dá přepsat také jako

$$x + 2y - z = 3\ .$$

Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{3} - \tfrac{1}{2}.$$

Kolmá přímka ke grafu funkce v bodě $A = (a_0, f(a_0)) = \big(1, 1, 0\big)$ na grafu funkce má směrový vektor, který je normálový vektor tečné roviny, tedy $\vec{n} = (1, 2, -1)$. Parametrický popis teto přímky je:

$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \ .$$

3.4 Pro funkci $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete totální diferenciál, derivace ve směrech $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, tečnou rovinu a přímku, která je kolmá ke grafu funkce v bodě a_0.

Řešení:
Definiční obor je $D(f) : y \neq 0$, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se ihned přesvědčíme), tak derivace v bodě a_0 skutečně existuje.

Pro $a_0 = (1, 1)$ je

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{1}{y(1 + (\frac{x}{y})^2)}, -\frac{x}{y^2(1 + (\frac{x}{y})^2)}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \ .$$

Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = df(a_0)[\vec{v}] = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x - 1) - \tfrac{1}{2}(y - 1)$$

neboli

$$x - y - 2z = -\tfrac{\pi}{2}$$

Normálový vektor tečné roviny je

$$\vec{n} = (\operatorname{grad} f(a_0), -1) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\right) \ .$$

Kolmá přímka ke grafu funkce v bodě $A = (a_0, f(a_0)) = \big(1, 1, \frac{\pi}{4}\big)$ na grafu funkce má směrový vektor, který je normálový vektor tečné roviny, tedy např. $\vec{m} = (1, -1, -2)$. Parametrický popis teto přímky je:

$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \ .$$

3.5 Pro funkci $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1,1)$ určete totální diferenciál, tečnou rovinu a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Který z vektorů $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ukazuje směrem většího stoupání?

Řešení:
Pro $a_0 = (1,1)$ tedy máme totální diferenciál

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y^2}{1+xy^2}, \frac{2xy}{1+xy^2}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \ .$$

Existence $df(a_0)$ plyne ze spojitosti parciálních derivací na okolí bodu a_0.

Tečná rovina je graf linearizace funkce f v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$. Má tedy rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) + y - 1$$

což se dá přepsat také jako

$$\tfrac{1}{2}x + y - z = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\pi}{4} \ .$$

Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Derivace ve směru $\vec{v}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = df(a_0)[\vec{v}] = \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \tfrac{3}{10}.$$

Stoupání (tj. strmost) ve směru $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ je dán úhlem, který svírá vektor $\left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right) \in \mathbb{R}^3$ (který leží v tečné rovině) s vodorovnou rovinou. Tangens tohoto úhlu je hodnota

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

protože $||\vec{u}|| = 1$.

Podobně pro vektor $\vec{v}$ je tangens tohoto úhlu

$$\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = \frac{3}{10}$$

protože $||\vec{v}|| = 1$. Stačí tedy porovnat tyto dvě hodnoty tangentu - protože je

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} > \frac{3}{10}$$

je větší stoupání ve směru $\vec{u}$.

3.6 Nalezněte úhel, který svírají

(a) graf funkce $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ a plocha $M : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$ v bodě $(1, 0, ?)$.

(b) graf funkce $f(x,y) = e^{\sin xy}$ a plocha $M : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 = 7$ v bodě $(0, 2, ?)$.

Řešení: zde.