

4. cvičení z Matematické analýzy 2

10. - 14. března 2025

4.1 Najděte rovnici tečné roviny k ploše M , která je rovnoběžná s rovinou ϱ jestliže

- (a) $M : x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, \quad \varrho : 4x + 2y + z = 3.$
- (b) $M : 3x^2 + y^2 + 3z^2 = 1, \quad \varrho : -12x + 2y + 6z = 0.$
- (c) $M : x^2 + 4y^2 - z^2 = 4, \quad \varrho : 2x + 2y + z = 0.$

Řešení: zde.

4.2 Necht' p je přímka procházející body $(1, 2, 3)$ a $(2, 3, 4)$. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, která je kolmá na přímkou p .

Řešení: zde.

4.3 Určete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ a $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ pro funkci $f(x, y) = \sin(x^2 y)$.

Řešení: zde.

4.4 Určete $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ pro funkci $f(x, y) = (y \cos x + x^{x^x})^2$.

Řešení:

Upřesněme si definici: $x^{x^x} = x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x} = e^{e^{x \ln x} \ln x}$ pro $x > 0$. Tat funkce má derivace všech řádů, tedy i funkce $f(x, y)$ má derivace všech řádů na otevřené množině $U : x > 0$, tedy je třídy C^∞ na U .

Můžeme tedy libovolně zaměňovat pořadí parciálních derivací na U . Proto toho využijeme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left((y \cos x + x^{x^x})^2 \right) \right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(2(y \cos x + x^{x^x}) \cdot \cos x \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2 \cos x^2) = -4 \cos x \cdot \sin x \end{aligned}$$

4.5 Napište Taylorův polynom 2. řádu pro

- (a) funkci $f(x, y) = x e^{\sin y}$ v okolí bodu $a_0 = (-1, 0)$.
- (b) funkci $f(x, y) = e^x \ln y$ v okolí bodu $a_0 = (0, 1)$.
- (c) funkci $f(x, y) = e^{\sqrt{x}-y}$ v okolí bodu $a_0 = (1, 1)$. Určete pomocí něj přibližnou hodnotu $f(1.01, 0.98)$.
- (d) funkci $f(x, y, z) = x e^y \cos z$ v okolí bodu $a_0 = (1, 0, 0)$. Určete pomocí něj přibližnou hodnotu $f(0.98, 0.01, -0.03)$.

Řešení: (a), (b), (c), (d).

4.6 Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

- (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(b) $f(x, y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2,$

(c) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6,$

(d) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$

Řešení: (a), (b), (c). (d).