# 5. cvičení z Matematické analýzy 2

17. - 21. března 2025

**5.1** Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x, y, z > 0$,

(b) $f(x,y,z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + x$,

(c) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ na $(0,\pi)^3$.

**Řešení:**
(a), (b).

(c) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě v otevřené množině $U = (0,\pi)^3$ je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \Big(\cos x - \cos(x+y+z),\quad \cos y - \cos(x+y+z),\quad \cos z - \cos(x+y+z)\Big)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y,z) = (0,0,0)$ právě když

$$\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x+y+z)\ .$$

Protože $x, y, z \in (0,\pi)$ a funkce cos je zde prostá, znamená to, že platí $x = y = z$. Tedy musíme splnit rovnici $\cos x = \cos 3x$ pro $x \in (0,\pi)$.

Obecně rovnost $\cos\alpha = \cos\beta$ platí právě když $\alpha + \beta = 2k\pi$ nebo $\alpha - \beta = 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

Pro $\alpha = 3x$ a $\beta = x$ tedy dostaneme, že $x = k\frac{\pi}{2}$ nebo $x = k\pi$ a jelikož $x \in (0,\pi)$, tak nastane jen možnost $x = \frac{\pi}{2}$.

Řešením je tak pouze $(x,y,z) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$\mathrm{d}^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin x + \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) \\ \sin(x+y+z) & -\sin y + \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) \\ \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & -\sin z + \sin(x+y+z) \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y,z) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je

$$\mathrm{d}^2 f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, $\Delta_3 = -8 - 1 - 1 + 2 + 2 + 2 = -4 < 0$) je forma daná druhou derivací negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

**5.2** Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou $x$ a má maximální obsah.

**Řešení:** zde.

**5.3** Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$, Načrtněte útvar určený touto vazbou.

**Řešení:** zde.

**5.4** Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$. Načrtněte útvary určené touto vazbou.

**Řešení:** zde.

**5.5** Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly $M: \ x^2 + 5xy + y^2 = 9$ od počátku $(0, 0)$.

**Řešení:** zde.

**5.6** Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

**Řešení:** zde.

**5.7** Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$$

na množině

$$M: \quad y^2 \leq 1 - x^2.$$

Načrtněte tuto množinu.

**Řešení:** zde.

**5.8** Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = 3xy$ na množině

(a) $M: \quad x^2 + y^2 \leq 2.$

(b) $M: \quad x(x - 1) \leq y \leq 0.$

Načrtněte tyto množiny.

**Řešení:** zde.

**5.9** Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ na množině $M: \ x^2 + y^2 \leq 2$.

**Řešení:**
Množina $M$ je kruh o poloměru $\sqrt{2}$ a středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na vnitřku množiny $M$, tj. na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 + y^2 < 2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 = 2$$

kterou máme vyjádřenu pomocí (jediné) diferencovatelné vazby.

**Extrém na $M^\circ$:**

Jestliže globální extrém $a = (x, y)$ leží v $M^\circ$, je současně také lokální a tedy musí platit, že

$$f'(x, y) = \big(2x - 2,\ 2y\big) = (0, 0)$$

což nastává právě když $(x, y) = (1, 0)$. Tento bod patří do $M^\circ$. Máme tedy zatím jediný bod, kde by mohl byt extrém.

**Extrém na $N = \partial M$:** Funkci vyšetříme na kružnici $N : x^2 + y^2 = 2$ neboli na množině

$$N = \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$$

kde $U = \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ vazbová funkce.

Podle metody Lagrangeových multiplikátorů pro extrém $a = (x, y)$ na $N$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x - 2,\ 2y\big) = f'(a) = \lambda g'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Máme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x - 1 &= \lambda x \\ y &= \lambda y \\ x^2 + y^2 &= 2. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice plyne, že buď $y = 0$ nebo $\lambda = 1$. Pokud je $y = 0$, pak ze třetí rovnice je $x^2 = 2$, tedy $x = \pm\sqrt{2}$. Pokud je $\lambda = 1$, pak z první rovnice je $x - 1 = x$, což nemá řešení. Máme tak kandidáty na extrémy:

$$(1, 0)\,, \qquad \Big(\sqrt{2}, 0\Big)\,, \qquad \Big(-\sqrt{2}, 0\Big)$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(1, 0\big) = -1, \qquad f\big(\sqrt{2}, 0\big) = 2 - 2\sqrt{2}, \qquad f\big(-\sqrt{2}, 0\big) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Množina $M$ je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce $f$ tak na $M$ nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj. $-1 < 2 - 2\sqrt{2}$) dostáváme, že funkce nabývá svého MINIMA v bodě $(-1, 0)$ a MAXIMA v bodě $\big(-\sqrt{2}, 0\big)$.