

6. cvičení z Matematické analýzy 2

24. - 28. března 2025

6.1 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ na ploše trojúhelníka M s vrcholy $(2, 0)$, $(0, 2)$ a $(0, -2)$.

Řešení: zde.

6.2 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M : x^2 \leq y \leq 4 .$$

Řešení: zde.

6.3 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ na množině

$$M : x \geq 0 \ \& \ y \geq 0 \ \& \ x + y \leq 6 .$$

Řešení: zde.

6.4 Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení: zde.

6.5 Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

Řešení:

Nechť bazén má dno s rozměry $x, y > 0$ a výšku $z > 0$. Budeme tedy hledat minimum funkce

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

na množině

$$M : xyz = V, \ x, y, z > 0 .$$

Řešení pomocí Lagrangeovy věty: zde.

Pomocí parametrizace:

Vyjádříme si $z = \frac{V}{xy}$ a dosadíme do funkce f . Budeme tedy hledat minimum funkce

$$h(x, y) = f(x, y, \frac{V}{xy}) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

na otevřené množině .

$$U : x, y > 0 .$$

Nutnou podmínkou extrému h na U v bodě $(x, y) \in U$ je nulovost totálního diferenciálu:

$$(0, 0) = dh(x, y) = \left(y - \frac{2V}{x^2}, x - \frac{2V}{y^2} \right)$$

takže máme rovnice

$$y = \frac{2V}{x^2} \quad x = \frac{2V}{y^2}$$

a dosazením první do druhé dostaneme jediné řešení $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$.
Pokud víme, že globální minimum existuje, pak jsme ho tímto našli.

Jak ukázat, že v bodě $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ minimum skutečně je? Můžeme buď použít věty o pozitivní definitnosti druhé derivace a věty o konvexnosti nebo můžeme použít tento trik:

Pro $x, y > 0$ je

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{\sqrt{xy}}$$

tedy

$$h(x, y) = xy + 2V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 2V \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 + xy + \frac{4V}{\sqrt{xy}} = 2V \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 + u(\sqrt{xy})$$

kde

$$u(t) = t^2 + \frac{4V}{t} = h(t, t), \quad t > 0$$

je funkce jedné proměnné.

Když vyšetříme funkci $u(t)$ pomocí derivace $u'(t) = 2t - \frac{4V}{t^2}$, zjistíme, že na intervalu $(0, \infty)$ má globální minimum v bodě $t_0 = \sqrt[3]{2V}$ s hodnotou $u(t_0) = 3\sqrt[3]{4V^2} = h(x_0, y_0)$.

Nyní tedy máme pro všechna $x, y > 0$ odhad

$$h(x, y) = 2V \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{u(\sqrt{xy})}_{\geq u(t_0) = h(x_0, y_0)} \geq h(x_0, y_0)$$

což znamená, že v bodě (x_0, y_0) je globální minimum h na U .

6.6 Do úseče kužele $1 - z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ vymezené rovinou $z = 0$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení: zde.

6.7 Do úseče eliptického paraboloidu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ vymezené rovinou $z = 1$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:

Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kváдру leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z) , který leží v množině:

$$M : z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \quad \& \quad 0 \leq x, y \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x, y, z) = xy(1 - z) .$$

Hledáme tedy maximum f na M .

Řešení pomocí Lagrangeovy věty: zde.

Pomocí parametrizace:

Dosadíme $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ a do funkce f . Budeme tedy hledat minimum funkce

$$h(x, y) = f(x, y, \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}) = xy(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}) = xy - \frac{1}{2}x^3y - \frac{1}{3}xy^3$$

na množině

$$N : x, y \geq 0 \text{ \& } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1 .$$

Na vnitřku množiny N , tedy

$$N^\circ : x, y > 0 \text{ \& } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} < 1 .$$

je nutnou podmínkou extrému h na N° nulovost totálního diferenciálu:

$$(0, 0) = dh(x, y) = \left(y - \frac{3}{2}x^2y - \frac{1}{3}y^3, \quad x - \frac{1}{2}x^3 - xy^2 \right)$$

takže máme rovnice

$$\begin{aligned} y(1 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2) &= 0 \\ x(1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2) &= 0 \end{aligned}$$

neboli (protože $x, y > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 &= 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

s jediným řešením $(x^2, y^2) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, tj. $(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{16}$.

Na hranici množiny N , která leží částečně na elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$, částečně na přímce $x = 0$ a částečně na přímce $y = 0$, je funkce h rovna nule. Tedy celou hranici tvoří podezřelé body.

Množina N je uzavřená a omezená a spojitá funkce h tak nabývá na N svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot v podezřelých bodech tak máme, že v bodě $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ je maximum h na N .

Rozměry hledaného kváдру jsou proto

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = \frac{1}{2} .$$

6.8 Určete rozměry obdélníka daného obvodu $2p$, který rotací kolem jedné strany vytvoří těleso s maximálním objemem.

Řešení: zde.

6.9 V rovině $3x - 2z = 0$ naleznete bod, pro nějž je součet čtverců vzdáleností od bodů $b = (1, 1, 1)$ a $c = (2, 3, 4)$ minimální.

Řešení:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro rovinu

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$$

kde $g(x, y, z) = 3x - 2z$ a funkci

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \|a - b\|^2 + \|a - c\|^2 = \\ &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \end{aligned}$$

vyjadřující součet čtverců vzdálenosti bodu $a = (x, y, z)$ od bodů $b = (1, 1, 1)$ a $c = (2, 3, 4)$. Pro extrém v bodě $a = (x, y, z)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\left(2(x - 3), 2(y - 4), 2(z - 5)\right) = f'_a = \lambda g'_a = \lambda \cdot (3, 0, -2)$$

a

$$3x - 2z = 0.$$

Vektorovou rovnici můžeme skalárně vynásobit vektorem $(3, -2, 0)$ a dostaneme:

$$\underbrace{2 \cdot (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{3x - 2z = 0} - 2 \cdot (3, 4, 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot (3, 0, -2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 0 + 2 = \lambda \cdot 13$$

Dostaneme $\lambda = \frac{2}{13}$, to dosadíme do vektorové rovnice a máme bod $a = (\frac{42}{13}, 4, \frac{63}{13})$. Pokud víme, že f nabývá minima na M , pak jsme právě tento bod našli.

Z čeho plyne existence minima? K nabytí minima funkce f bychom (kromě uzavřenosti M) potřebovali také omezenost M , kterou ale nemáme. Funkce f má ale našťastí vlastnost

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in M) \quad \|a\| \geq \delta \Rightarrow f(a) \geq K$$

která zaručuje existenci minima f na M .

Tuto vlastnost lze snadno ukázat - pro $a \in \mathbb{R}^3$ máme z trojúhelníkové nerovnosti

$$f(a) = \|a - b\|^2 + \|a - c\|^2 \geq \left(\|a\| - \|b\|\right)^2 + \left(\|a\| - \|c\|\right)^2 = r(\|a\|)$$

kde $r(t) := (t - \|b\|)^2 + (t - \|c\|)^2$ je polynom stupně 2. Protože $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$, tak, z definice limity funkce r , dostaneme:

Pro každé $K > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $t > \delta$ je $r(t) > K$. Stačí tedy pro $a \in M$ vzít $t = \|a\|$.

Pak pro $\|a\| > \delta$ je $f(a) \geq r(\|a\|) > K$, což jsme chtěli.

6.10 Bodem $P = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, kde $a, b, c > 0$, veďte rovinu tak, aby objem čtyřštěny vymezeného touto rovinou na kladných částech os byl minimální.

Řešení:

Čtyřstěn je určen délkou svých hran na jednotlivých osách. Tyto délky označme x_0 , y_0 a z_0 . Objem

čtyřstěnu je $\frac{1}{3}x_0y_0z_0$. Rovina, která čtyřstěn vymezuje má tedy rovnici $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$. Tato rovina obsahuje bod P právě když platí $\frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} + \frac{c}{z_0} = 1$.

Nyní zformulujeme úlohu, kde místo x_0, y_0, z_0 budeme psát x, y, z .

Hledáme minimum funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině

$$M : \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1, \quad x, y, z > 0.$$

Použijeme Lagrangeovu větu pro $M = \{(x, y, z) \in U \mid g(x, y, z) = 0\}$, kde $U : x, y, z > 0$ je otevřená množina a $g(x, y, z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} - 1$ je vazbová funkce. Pro bod $(x, y, z) \in M$ extrému f na M tak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = \text{grad } f(x, y, z) = \lambda \cdot \text{grad } g(x, y, z) = \lambda \cdot \left(-\frac{a}{x^2}, -\frac{b}{y^2}, -\frac{c}{z^2} \right)$$

protože zjevně $\text{grad } g(x, y, z) = \left(-\frac{a}{x^2}, -\frac{b}{y^2}, -\frac{c}{z^2} \right) \neq (0, 0, 0)$.

Máme tedy podmínky

$$\begin{aligned} yz &= -\lambda \cdot \frac{a}{x^2} \\ xz &= -\lambda \cdot \frac{b}{y^2} \\ xy &= -\lambda \cdot \frac{c}{z^2} \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} &= 1, \quad x, y, z > 0. \end{aligned}$$

Vydělením prvních dvou rovnic dostaneme

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y^2}{x^2} \implies \frac{b}{y} = \frac{a}{x}$$

a symetricky $\frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Tedy $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ a dosazením do čtvrté rovnice získáme $\frac{a}{x} + \frac{a}{x} + \frac{a}{x} = 1$ neboli $x = 3a$. Podobně dostaneme $y = 3b$ a $z = 3c$.

Tedy jediný podezřelý bod je $(x, y, z) = (3a, 3b, 3c)$, kterému odpovídá rovina

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1.$$

Abychom mohli usoudit, že v tomto bodě je minimum, musíme vědět, že f nabývá na M minima. Množina M je uzavřená (protože je možné ji zapsat také jako $M : \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ & $x, y, z \geq 0$, kde jsou použity rovnosti a neostře nerovnosti). Množina M ale už není omezená (např. obsahuje body $(xa, 2b, \frac{2xc}{x-2})$ pro $x > 2$).

K existenci minima f na M stačí, pokud f má vlastnost

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y, z) \in M) \quad \|(x, y, z)\| \geq \delta \implies f(x, y, z) \geq K$$

K ověření této vlastnosti stačí následující odhad:

Pro bod $(x, y, z) \in M$ předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $\max\{x, y, z\} = x$ a označme $\varepsilon = \min\{a, b, c\}$. Pak je

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$$

a

$$\frac{a}{x} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \implies \frac{a}{x} \leq 1 \implies \varepsilon \leq a \leq x$$

a podobně $\varepsilon \leq y$ a $\varepsilon \leq z$.

Tedy vždy dostaneme tento odhad

$$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \|(x, y, z)\| \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon .$$

Nyní pro $K > 0$ stačí požadovat, aby

$$f(x, y, z) \geq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{3}} \cdot \|(x, y, z)\| > K$$

tedy položit $\delta := \frac{\sqrt{3}K}{\varepsilon^2}$ a máme to.