

7. cvičení z Matematické analýzy 2

31. března - 4. dubna 2025

7.1 Necht' $f = f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Najděte parciální derivace funkce

(a) $g(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$

(b) $g(s, t) = f\left(\frac{s}{t}, t - s\right)$.

(v závislosti na parciálních derivacích funkce f).

Řešení: zde.

7.2 Transformujte diferenciální výraz

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}$$

pomocí polárních souřadnic:

$$\Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$$

$$(r, \varphi) \mapsto (x, y)$$

kde

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi .$$

Řešení: zde.

7.3 Transformujte diferenciální výraz

$$\frac{1-x^2}{y} \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

pomocí souřadnic:

$$\Psi : \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \neq 0 \wedge s + t \neq 0\} \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -1 \wedge y \neq 0\}$$

$$(s, t) \mapsto (x, y)$$

kde

$$x = \frac{t}{s}$$

$$y = t + s .$$

Řešení: zde.

7.4 Transformujte diferenciální výraz

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

pomocí souřadnic:

$$\Omega : (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)^2$$

$$(x, y) \mapsto (s, t)$$

kde

$$s = \frac{y}{x}$$

$$t = xy .$$

Řešení:

Transformace souřadnic Ω je bijektivní zobrazení. Definiční obor i obor hodnot zobrazení Ω jsou obě otevřené množiny. Zobrazení je spojitě diferencovatelné (tedy složky Jacobiho matice pro Ω jsou funkce třídy C^1) a inverzní zobrazení Ω^{-1} je také spojitě diferencovatelné diferencovatelné:

$$\Omega^{-1} : \quad x = \sqrt{\frac{t}{s}} \quad y = \sqrt{st}$$

Potřebujeme vyjádřit hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pomocí hodnot a $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t)$ a $\frac{\partial F}{\partial t}(s, t)$, kde $\Omega(x, y) = (s, t)$ a $F(s, t) = f(x, y)$, tj. $F \circ \Omega = f$.

Vezmeme si tedy rovnost

$$f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}, xy\right)$$

a použijeme na ní $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial y}$ čímž podle řetězového pravidla dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F\left(\frac{y}{x}, xy\right)\right) = \frac{\partial F}{\partial s}\left(\frac{y}{x}, xy\right) \cdot \frac{\partial(\frac{y}{x})}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{y}{x}, xy\right) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial F}{\partial s}\left(\frac{y}{x}, xy\right) + y \frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{y}{x}, xy\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(F\left(\frac{y}{x}, xy\right)\right) = \frac{\partial F}{\partial s}\left(\frac{y}{x}, xy\right) \cdot \frac{\partial(\frac{y}{x})}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{y}{x}, xy\right) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial s}\left(\frac{y}{x}, xy\right) + x \frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{y}{x}, xy\right)$$

Řetězové pravidlo je jen důsledek toho, jak se derivuje složené zobrazení. Po přepsání

$$\left(\frac{y}{x}, xy\right) = \Omega(x, y) = (s, t)$$

a vyjádření

$$x = \sqrt{\frac{t}{s}} \quad y = \sqrt{st}$$

dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sqrt{\frac{s^3}{t}} \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) + \sqrt{st} \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{\frac{s}{t}} \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) + \sqrt{\frac{t}{s}} \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) .$$

A po dosazení máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sqrt{\frac{s^3}{t}} \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) + \sqrt{st} \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) + s \left(\sqrt{\frac{s}{t}} \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) + \sqrt{\frac{t}{s}} \frac{\partial F}{\partial t}(s, t) \right) =$$

$$= 2\sqrt{st} \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)$$

7.5 Změňte pořadí integrace v integrálu

(a)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) \, dx \, dy$$

(b)

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x, y) \, dy \, dx$$

(c)

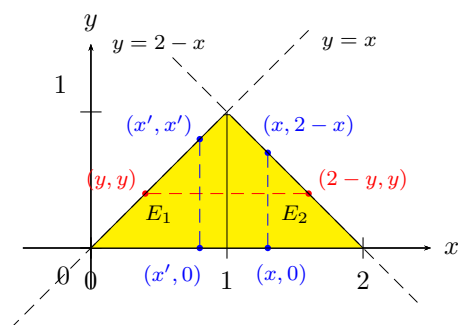
$$\int_0^1 \int_y^{2-y} f(x, y) \, dx \, dy$$

Řešení:

(a), (b).

(c) Základní oblasti integrace je

$$E : \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad y \leq x \leq 2 - y$$



Vzhledem ke tvaru oblasti E a tomu, že je popsána různými funkcemi na různých částech je vhodné ji rozdělit na dvě oblasti E_1 a E_2 :

$$E_1 : \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad y \leq x \leq 1$$

$$E_2 : \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad 1 \leq x \leq 2 - y$$

které vyjádříme takto

$$E_1 : \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x$$

$$E_2 : \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 - x.$$

Množiny E_1 a E_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1 \rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $E = E_1 \cup E_2$.

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_y^{2-y} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_E f \, dS = \iint_{E_1} f \, dS + \iint_{E_2} f \, dS = \int_0^1 \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) \, dy \, dx$$

Pozor! Pokud by se oblasti překrývaly E_1 a E_2 na nějaké “podstatnější” množině, bylo by pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti E_i). Přesněji, platí

$$\iint_{E_1} f \, dS + \iint_{E_2} f \, dS = \iint_{E_1 \setminus E_2} f \, dS + 2 \cdot \iint_{E_1 \cap E_2} f \, dS + \iint_{E_2 \setminus E_1} f \, dS \left(= \iint_{E_1 \cup E_2} f \, dS + \iint_{E_1 \cap E_2} f \, dS \right)$$

7.6 Změňte pořadí integrace v integrálu

(i)

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx$$

(ii)

$$\int_1^{-1} \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Řešení: zde.

7.7 Vypočítejte hodnotu integrálu a načrtněte oblast integrace:

(a)

$$\int_0^2 \int_{2x}^2 4e^{y^2} \, dy \, dx$$

(b)

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos \sqrt{x^3} \, dx \, dy$$

Řešení: (a), (b).