

8. cvičení z Matematické analýzy 2

7. - 11. dubna 2025

8.1 Vypočítejte hodnotu integrálu a načrtněte oblast integrace:

(a)

$$\iint_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2} \, dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.

(b)

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}} \, dS,$$

kde E je oblast v prvním kvadrantu omezená křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

(c)

$$\iint_E \frac{1}{y^4 + 1} \, dS$$

kde oblast E je omezena křivkami $x = y^3$, $y = 2$ a $x = 0$.

Řešení: (a), (b), (c).

8.2 Vypočítejte hodnotu integrálu:

(a)

$$\iint_E e^{\max\{x^2, y^2\}} \, dx \, dy,$$

kde $E = \langle 0, 1 \rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b)

$$\iint_M |y - \sin x| \, dx \, dy$$

kde $M = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení: (a), (b).

8.3 Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x, y) \, dx \, dy$$

v polárních souřadnicích (se středem v počátku souřadnic) v pořadí $d\rho \, d\varphi$ pro oblasti

(a) $E = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

(b) $E: (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \ \& \ y + x^2 \geq 0 \ \& \ x \geq 0 \ \& \ y \leq 0$.

(c) E , která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1, 0)$, $(2, 0)$ a $(1, 1)$.

(d) $E: x^2 + y^2 \leq 9 \ \& \ 0 \leq y \leq 1 \ \& \ x \geq 0.$

(e) $E: x^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \ \& \ y \geq 1 \ \& \ x \geq 0.$

Řešení: (a), (b), (c), (d).(e).

8.4 Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x, y) \, dx \, dy$$

v polárních souřadnicích (se středem v počátku souřadnic) v pořadí $d\rho \, d\varphi$ pro oblasti

(a) $E: 0 \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}.$

(b) $E: 0 \leq x \leq 1 \ \& \ x^2 \leq y \leq 1.$

Řešení: (a),(b).

8.5 Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx,$$

(b)

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx$$

(c)

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Řešení: (a), (b), (c).

8.6 Spočítejte integrál

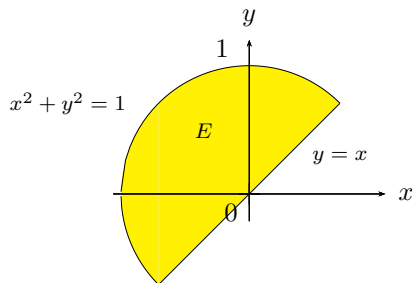
$$\iint_E \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy,$$

kde

$$E: x^2 + y^2 \leq 1 \ \& \ y \geq x.$$

Řešení:

Oblast integrace je polovina kruhu.



Její parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U : \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4} .$$

takže máme

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \iint_U \frac{r}{1 + r} dr d\varphi = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{r}{1 + r} dr d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 1 - \frac{1}{1 + r} dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 1 d\varphi \right) = \left(1 - [\ln(1 + r)]_0^1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (1 - \ln 2) . \end{aligned}$$

8.7 Spočítejte integrál

$$\iint_E \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right)} dx dy ,$$

kde

$$E : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 .$$

Řešení: zde.

8.8 S použitím vhodné substituce určete

$$\iint_E \frac{1}{x^2 y^2} dx dy$$

kde E je ohraničena křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ a $x = 3y^2$.

Řešení: zde.

8.9 Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{2-2y} (x + 2y) e^{y-x} dx dy .$$

Řešení: zde.