

9. cvičení z Matematické analýzy 2

14. - 18. dubna 2025

9.1 Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx$$

Řešení: zde.

9.2 Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz \, dy \, dx$$

Řešení: zde.

9.3 Vypočtěte

$$\iiint_E z^2 \, dV,$$

kde E je ohraničena plochami $y = x^2$, $z = 0$, $y + z = 1$.

Řešení: zde.

9.4 Vypočtěte

$$\iiint_E xyz \, dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

Řešení: zde.

9.5 Vypočtěte

$$\iiint_E xy \, dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 1, 1)$.

Řešení: zde.

9.6 Zapište integrál pomocí cylindrických souřadnic a pak jej spočítejte

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx.$$

Řešení: zde.

9.7 Zapište integrál pomocí cylindrických souřadnic a pak jej spočítejte:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dz dy dx .$$

Řešení: zde.

9.8 Uvažme těleso $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ s hustotou $\sigma(x, y, z) = z$. Nalezněte $a > 0$ tak, aby rovina $z = a$ rozdělila těleso M na dvě stejně těžké části.

Řešení:

Těleso má výšku 1, takže pro parametr a má smysl uvažovat pouze rozmezí $0 \leq a \leq 1$.

Použijeme funkci $f(a) = \iiint_{M_a} z dV$ vyjadřující hmotnost spodní části tělesa M po rozdělení rovinou ve výšce a .

Zde je $M_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z \leq a\}$.

Hodnotu $0 \leq a \leq 1$ určíme tak, že $f(a) = \frac{1}{2}f(1)$.

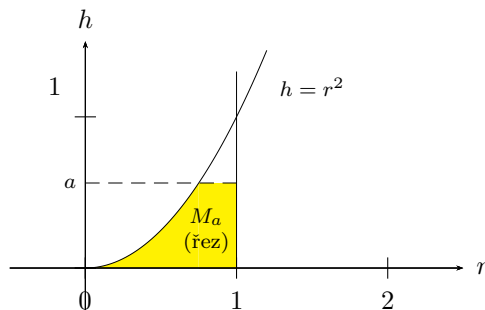
Oblast M_a je omezena zespodu rovinou $z = 0$, shora z části rotačním paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a z části rovinou $z = a$ a ze stran válcem $x^2 + y^2 = 1$. Je tedy vhodné použít cylindrické souřadnice.

$$\Phi : \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad z = h .$$

Po dosazení do nerovnosti pro M_a máme

$$0 \leq h \leq r^2, \ r^2 \leq 1, \ h \leq a$$

což odpovídá řezu tělesa M_a svislou polorovinou, která prochází osou z a je určena úhlem φ (který se měří od kladného směru osy x).



Oblast parametrizace U_a tak bude

$$U_a : \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq h \leq a \quad \& \quad \sqrt{h} \leq r \leq 1 .$$

Pak je

$$\begin{aligned} f(a) &= \iiint_{M_a=\Phi(U_a)} z \, dV = \iiint_{U_a} h \cdot r \, dr \, dh \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\sqrt{h}}^1 hr \, dr \, dh \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{h}{2} (1-h) \, dh \right) d\varphi = \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^a h - h^2 \, dh \right) = \pi \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right) . \end{aligned}$$

Tedy z rovnosti $f(a) = \frac{1}{2}f(1)$ máme

$$\pi \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{\pi}{12}$$

neboli

$$4a^3 - 6a^2 + 1 = 0 .$$

Pokud je kořenem tohoto polynomu racionální číslo $\frac{p}{q}$ v nesoudělném tvaru, pak musí platit, že q dělí 4 a že p dělí 1. Tedy možné (kladné) kořeny jsou jen 1 nebo $\frac{1}{2}$ nebo $\frac{1}{4}$. Z toho je jediný kořen pouze $a = \frac{1}{2}$.

Protože

$$4a^3 - 6a^2 + 1 = 2(a - \frac{1}{2})(2a^2 - 2a - 1) = 4(a - \frac{1}{2})(a - \frac{1+\sqrt{3}}{2})(a - \frac{1-\sqrt{3}}{2})$$

a $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \notin (0, 1)$, tak hledaná hodnota je právě $a = \frac{1}{2}$.

9.9 Určete hmotnost tělesa E omezeného plochami $x^2 + z^2 = 1$, $x + \frac{y}{2} + z = 2$ a prostorem $x, y, z \geq 0$. Hustota tělesa je $\sigma(x, y, z) = |y|$.

Řešení: zde.

9.10 Určete hmotnost tělesa E omezeného plochami $x^2 + y^2 = 1$, $z = |y|$ a $z = 1$ s hustotou $\sigma(x, y, z) = x^2$.

Řešení:

Těleso E je část válce omezeného shora rovinou $z = 1$ a zespodu seříznutého šikmo rovinami $z = y$ a $z = -y$. Tedy:

$$E : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad |y| \leq z \leq 1 .$$

Pro každou dvojici (x, y) splňující $x^2 + y^2 \leq 1$ platí, že $|y| \leq 1$. Tedy lze najít nějaké z , splňující $|y| \leq z \leq 1$. Proto průmět množiny E do roviny xy je celý kruh $x^2 + y^2 \leq 1$.

Použijeme proto cylindrické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ \Phi : \quad y &= r \sin \varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení této parametrizace do podmínek pro E dostaneme

$$r^2 \leq 1, \quad r|\sin \varphi| \leq h \leq 1 .$$

tedy oblast U parametrizace množiny E je:

$$U : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad r|\sin \varphi| \leq h \leq 1 .$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \text{hmotnost}(E) &= \iiint_E \sigma(x, y, z) \, dV = \iiint_E x^2 \, dV = \iiint_U r^2 \cos^2 \varphi \cdot r \, d\varphi \, dh \, dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r|\sin \varphi|}^1 r^3 \cos^2 \varphi \, dh \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \varphi \cdot (1 - r|\sin \varphi|) \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \varphi - r^4 \cos^2 \varphi |\sin \varphi| \, dr \, d\varphi = \\ &= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \right)}_{=\pi} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r^3 \, dr \right)}_{=\frac{1}{4}} - \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi |\sin \varphi| \, d\varphi \right)}_{=\frac{4}{3}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 r^4 \, dr \right)}_{=\frac{1}{5}} = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{15} \end{aligned}$$

protože

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cdot |\sin \varphi| \, d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \, d\varphi = 2 \cdot \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

9.11 Určete moment setrvačnosti J tělesa

$$E : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \quad \& \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \& \quad x, y, z \geq 0 .$$

vzhledem k ose otáčení z .

Řešení: zde.