10. cvičení z Matematické analýzy 2

24. dubna 2026

10.1 Nechť $f = f(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Najděte (obecně) derivaci funkce

(a) $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$,

(b) $g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ pro $0 < \varphi < 2\pi$ a $r > 0$.

Řešení: zde.

10.2 Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\, dy\, dx$$

Řešení: zde.

10.3 Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

Řešení: zde.

10.4 Vypočtěte

$$\iiint_E xyz \; dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

Řešení: zde.

10.5 Vypočtěte

$$\iiint_E z^2 \; dV,$$

kde E je ohraničena plochami $y = x^2$, $z = 0$, $y + z = 1$.

Řešení: zde.

10.6 Vypočtěte

$$\iiint_E xy \; dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Řešení: zde.

10.7 Vypočtěte

$$\iiint\limits_E y\, dV,$$

kde $E: \; x+y \leq 1, \quad y+z \leq 1, \quad x,y,z \geq 0.$

Řešení: zde.

10.8 Určete moment setrvačnosti J tělesa

(a) E ohraničeného plochami $y = x^2 + z^2$ a $y = 8 - x^2 - z^2$ vzhledem k ose otáčení y (s hustotou $\sigma(x,y,z) = 1$).

(b) $E : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h_0$, kde $h_0 > 0$, s hustotou $\sigma(x,y,z) = 1$ vzhledem k ose otáčení z.

Řešení: zde.

10.9 Uvažme těleso $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ s hustotou $\sigma(x,y,z) = z$. Nalezněte $a > 0$ tak, aby rovina $z = a$ rozdělila těleso M na dvě stejně těžké části.

Řešení: zde.

10.10 (cylindrické souřadnice)
Určete objem tělesa E omezeného zdola plochou $x^2 + y^2 = z$ a shora plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Řešení: zde.