2. cvičení z Matematické analýzy 2

27. února 2026

2.1 Pro následující funkce f načrtněte graf (a případně popište vrstevnice):

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

(b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

(c) $f(x,y) = x + \sin y$,

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$,

(e) $f(x,y) = xy$.

Řešení: (a),(b),(d),(e) a c),(d).

2.2 Vyšetřete existenci následujících limit:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x+y}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2|x|+|y|}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$

Řešení:
(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{x+y}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y \; .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu $c \in \mathbb{R}$ by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po vhodné křivce. Nejjednodušší jsou obvykle přímky. Vezměme si tedy přímku $y = kx$, kde $k \neq -1$. Pro $x \to 0$ máme $(x,kx) \to (0,0)$. Takže nás bude zajímat

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{(x-kx)^2}{x+kx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-k)^2}{1+k} x = 0 \; .$$

Pokud naše původní limita existuje musí mít tedy hodnotu $c = 0$ (to, že jsme prověřili přímky a dostali stejnou hodnotu, ale ještě NIC o existenci limity NEŘÍKÁ! K tomu bychom museli stejnou hodnotu dostat také pro VŠECHNY možné další křivky, po kterých se můžeme dostat do bodu a_0).

Jestliže chceme najít přiblížení, pro které vyjde jiná hodnota než 0, můžeme v tomto případě zkusit "variaci konstanty k" a vzít křivku ve tvaru $y(x) = k(x) \cdot x$, kde $k(x)$ je zatím neznámá funkce a kdy chceme, aby pro $x \to 0$ bylo také $y(x) \to 0$. Křivku dosadíme do funkce:

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{\big(x - k(x)\cdot x\big)^2}{x + k(x)\cdot x} = \frac{\big(1-k(x)\big)^2}{1+k(x)} \cdot x$$

Nyní bude stačit, když se např. $\frac{x}{1+k(x)}$ bude blížit ke konečné nenulové hodnotě a současně i $\big(1-k(x)\big)^2$ se bude blížit ke konečné nenulové hodnotě.

Stačí položit např. $\frac{x}{1+k(x)} = 1$, tj. $k(x) = x - 1$. Musíme ještě ověřit, že v tomto případě je křivka

$$y(x) = k(x)\cdot x = (x-1)x$$

stále v definičním oboru $D(f)$ (což by stačilo i jen pro x blízká k 0). To je ale ihned vidět. Dále také zřejmě je $y(x) \to 0$ pro $x \to 0$.

A nakonec vidíme, že

$$f\big(x,y(x)\big) = \dots = \frac{\big(1-k(x)\big)^2}{1+k(x)} \cdot x = (2-x)^2 \quad \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} \quad 4$$

což je kýžený výsledek.

Současně si všimněme, že k bodu $(0,0)$ se blížíme v tomto případě po parabole $y(x) = x^2 - x$ jejíž tečna v bodě $(0,0)$ je právě přímka $y = x$, kterou jsme vyloučili z definičního oboru $D(f)$. Toto je v jistém smyslu i návod pro jiné příklady - hledejme křivky "napodobující" hranici definičního oboru v daném bodě.

Zjistili jsme tedy, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$ neexistuje.

(b) podobně jako zde,

(c).

2.3 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce f spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$? Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení: zde.