6. cvičení z Matematické analýzy 2

27. března 2026

6.1 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ na množině $M: \; x^2 + y^2 \leq 2$.

Řešení: zde.

6.2 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ na ploše trojúhelníka M s vrcholy $(2,0)$, $(0,2)$ a $(0,-2)$.

Řešení: zde.

6.3 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ na množině

$$M: \quad x \geq 0 \;\;\&\;\; y \geq 0 \;\;\&\;\; x + y \leq 6 \;.$$

Řešení: zde.

6.4 Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = 3xy$ na množině $M: \quad x(x-1) \leq y \leq 0$. Načrtněte tuto množinu.

Řešení: zde.

6.5 Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení: zde.

6.6 Najděte tři pozitivní čísla x, y, z taková, že xy^2z^3 je maximální a $x + y + z = c$, kde $c > 0$ je parametr.

Řešení:

Budeme hledat body maxima funkce

$$f(x,y,z) = xy^2z^3$$

na množině

$$M = \{(x,y,z) \in U \mid \Phi(x,y,z) = 0\},$$

kde

$$U: \; x, y, z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x,y,z) = x + y + z - c$$

je vazbová funkce.

Protože U je otevřená a $\mathrm{grad}\Phi(a_0) = (1,1,1) \neq (0,0,0)$ pro každé $a_0 \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a_0 = (x,y,z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) = \mathrm{grad}f(a_0) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a_0) = \lambda(1,1,1)$$

a

$$x + y + z = c \;.$$

Odsud máme že $y^2z^3 = \lambda = 2xyz^3$ a $y^2z^3 = \lambda = 3xy^2z^2$. Protože $x, y, z > 0$, tak po zkrácení dostaneme $y = 2x$ a $z = 3x$. A po dosazení máme $c = x + y + z = x + 2x + 3x = 6x$, tj. $x = \frac{c}{6}$.

Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a_0 = \left(\frac{c}{6}, \frac{c}{3}, \frac{c}{2}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{c}{6}, \frac{c}{3}, \frac{c}{2}\right) = \frac{c^3}{36}$.

Abychom mohli využít věty o nabytí extrémů, potřebujeme ale uzavřenou množinu, což M není (je to trojúhelník, ale bez hran). Tak si M prostě uzavřeme, čímž dostaneme

$$\overline{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \quad \& \quad \Phi(x, y, z) = 0\},$$

což je trojúhelník i s hranami. Na těchto přidaných hranách je ale funkce f nulová, takže všechny hrany můžeme zařadit mezi podezřelé body z extrémů na $\overline{M}$. Tím jsme prošli všechny body $\overline{M}$.

Množina $\overline{M}$ je teď už uzavřená a omezená, takže spojitá funkce f zde nabývá svých extrémů. Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech teď snadno dostáváme, že na hranách nabývá f svého minima a v bodě $\left(\frac{c}{6}, \frac{c}{3}, \frac{c}{2}\right)$ svého (jediného) maxima (jak jsme očekávali).

6.7 Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

Řešení: zde a zde.

6.8 Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly $M:\ x^2 + 5xy + y^2 = 9$ od počátku $(0, 0)$.

Řešení: zde.

6.9 Určete rozměry obdélníka daného obvodu $2p$, který rotací kolem jedné strany vytvoří těleso s maximálním objemem.

Řešení: zde.