# Poznámky k Fourierovým řadám

Motivací pro Fourierovy řady (a rozvoj) je snaha vyjádřit funkci s periodou $T$ pomocí "nejběžnějších" periodických funkcí, které známe, tj. pomocí sinu a kosinu. Na rozdíl od mocninných řad, kde jde především o to, abychom se bodově co nejvíce přiblížili hodnotě původní funkce, zde nám půjde především o přiblížení pomocí normy v prostoru se skalárním součinem. Tento skalární součin bude dán integrálem. Pro lepší představu si připomeňme, jak to v prostorech se skalárním součinem funguje:

**Motivace:** Mějme vektorový prostor $V$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a navzájem kolmé nenulové vektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in V$. Pro vektor

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$$

kde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ máme

$$\langle \vec{w}, \vec{u}_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j, \vec{u}_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \vec{u}_j, \vec{u}_i \rangle = \lambda_i \langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = \lambda_i \|\vec{u}_i\|^2$$

tedy

$$\lambda_i = \frac{\langle \vec{w}, \vec{u}_i \rangle}{\|\vec{u}_i\|^2}$$

a my máme

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \vec{w}, \vec{u}_i \rangle}{\|\vec{u}_i\|^2} \cdot \vec{u}_i \ .$$

Tedy pomocí skalárního součinu umíme určit koeficienty $\lambda_i$ v zápisu vektoru $\vec{w}$. A kromě toho platí i Pythagorova věta

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\lambda_1 \vec{u}_1\|^2 + \cdots + \|\lambda_n \vec{u}_n\|^2 \ .$$

To je motivace pro následující zobecnění (detaily nebudeme rozebírat):

Uvažujme vektorový prostor všech integrabilních funkcí na intervalu $[0, T]$ takových, že mají i integrabilní kvadrát na intervalu $[0, T]$, a skalární součin těchto funkcí si definujeme jako

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) g(t) \, dt \ .$$

(ve skutečnosti musíme ještě ztotožňovat ty funkce, které neumíme rozeznat z hlediska integrálu). Následující funkce pro $\omega = \frac{2\pi}{T}$ tvoří množinu navzájem kolmých vektorů (v tomto skalárním součinu):

$$1, \ \cos(\omega t), \ \sin(\omega t), \ \cos(2\omega t), \ \sin(2\omega t), \ \ldots$$

Označíme si obvyklou normu $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Pak pro normy těchto vektorů máme

$$\|1\|^2 = \int_0^T 1^2 \, dt = T$$

$$\|\cos(k\omega t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(k\omega t) \, dt = \tfrac{T}{2}$$

$$\|\sin(k\omega t)\|^2 = \int_0^T \sin^2(k\omega t) \, dt = \tfrac{T}{2}$$

pro $k \geq 1$.

Nyní si představme, že chceme "vyjádřit" funkci $f$ pomocí výše uvedené množiny ortogonálních funkcí - tedy jako nekonečný součet $a_0 \cdot \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$, kde jsme pouze konstantní funkci 1 nahradili konstantní funkcí $\frac{1}{2}$, aby nám následné vzorce vycházely v lepším tvaru.

Nyní ještě předpokládejme, že můžeme bez omezení zaměňovat skalární součin a nekonečnou sumací (tj. můžeme postupovat jako v konečném součtu na začátku našich úvah). V tom případě tedy dostaneme následující vztahy

$$a_0 = \frac{\langle f, \frac{1}{2} \rangle}{\| \frac{1}{2} \|^2} = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t)\, dt,$$

$$a_k = \frac{\langle f, \cos(k\omega t) \rangle}{\| \cos(k\omega t) \|^2} = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt$$

a

$$b_k = \frac{\langle f, \sin(k\omega t) \rangle}{\| \sin(k\omega t) \|^2} = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt \ .$$

K těmto vzorcům jsme tedy došli čistě heuristicky, aniž bychom o jejich vztahu k výše zmíněné radě mohli v tuto chvíli něco říct. Nyní si je naopak vezmeme jako základ pro definici Fourierovy řady, o které se pak dají už dokazovat tvrzení.

**Definice:** Nechť $f$ je $T$-periodická funkce, která je integrabilní na intervalu $[0, T]$.

Její *Fourierovu řadu* definujeme jako $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je její frekvence, a koeficienty jsou definované výše uvedenými vzorci. Přiřazení Fourierovy řady funkci $f$ pak zapisujeme jako

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big].$$

**Tvrzení o sudosti a lichosti:** (i) Pokud $f$ je lichá, pak $a_k = 0$ a $b_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt$ (neboli při rozvoji nepoužíváme sudé funkce $\cos(k\omega t)$ a konstantu 1).

(ii) Pokud $f$ je sudá, pak $b_k = 0$ a $a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt$ (neboli při rozvoji nepoužíváme liché funkce $\sin(k\omega t)$).

Použili jsme prostě to, že pro sudou funkci $g$ s periodou $T$ a pro každé $c \in \mathbb{R}$ je

$$\int\limits_0^T g(t)\, dt = \int\limits_{0+c}^{T+c} g(t)\, dt = \int\limits_{-T/2}^{T/2} g(t)\, dt = 2 \int\limits_0^{T/2} g(t)\, dt$$

a podobně pro lichou $h$ s periodou $T$ a pro každé $c \in \mathbb{R}$ je

$$\int\limits_0^T h(t)\, dt = \int\limits_{0+c}^{T+c} h(t)\, dt = \int\limits_{-T/2}^{T/2} h(t)\, dt = 0 \ .$$

**Jordanovo kritérium:** Nechť $f$ je $T$-periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu $I$ délky $T$. Předpokládejme, že její derivace $f'$ je po částech spojitá na $I$.

Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N\to\infty} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big] \right) = \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)].$$

Pokud je $f$ navíc spojitá na $\mathbb{R}$, pak $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$ konverguje k $f$ *stejnoměrně.*

**Parsevalova rovnost:** Nechť $f$ je $T$-periodická funkce, která má konečný integrál z $f$ a z $f^2$ na nějakém intervalu $I$ délky $T$. Pak pro koeficienty $a_n$, $b_n$ z její Fourierovy řady platí rovnost

$$\frac{2}{T} \int\limits_0^T f^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k^2 + b_k^2\big)$$

.

Parsevalova rovnost je vlastně zobecněná Pythagorova věta, jak je vidět z jejího ekvivalentního přepisu na tvar:

$$\underbrace{\|f\|^2}_{\int_0^T f^2(t)\,dt} = \underbrace{\|a_0 \cdot \tfrac{1}{2}\|^2}_{a_0^2 \cdot \frac{T}{4}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \underbrace{\|a_k \cos(k\omega t)\|^2}_{a_k^2 \cdot \frac{T}{2}} + \underbrace{\|b_k \sin(k\omega t)\|^2}_{b_k^2 \cdot \frac{T}{2}} \right).$$