

1. cvičení z Matematické analýzy 1

25. - 29. září 2023

Úloha 1. Určete definiční obor a načrtněte graf funkce

(a) $f(x) = x^n$, kde $n \in \mathbb{Z}$ (tj. n je celé číslo),

(b) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, kde $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Kde jsou tyto funkce definovány? Jaký je vztah mezi grafy funkcí z (a) a (b)? Jak se mění graf funkce f , pokud měníme parametr n ?

Úloha 2. Uvažujte funkci f danou předpisem $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Napište, jak v tomto konkrétním případě vypadají předpisy následujících funkcí g , a načrtněte jejich grafy:

(a) $g(x) = f(x+2)$

(b) $g(x) = f(x) + 2$

(c) $g(x) = f(2x)$

(d) $g(x) = 2f(x)$.

Úloha 3. Je-li $g(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a f reálná funkce, jaký vliv na graf funkce h mají dané parametry ještěže

(a) $h(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$,

(b) $h(x) = g(f(x)) = af(x) + b$.

Úloha 4. Načrtněte a vzájemně srovnajte grafy funkcí s následujícími předpisy:

(a) $f(x) = \sin(2x)$

(b) $f(x) = \sin(x+2)$

(c) $f(x) = 2 - \sin(x)$

(d) $f(x) = x + \sin x$

(e) $f(x) = x \sin(x)$

(f) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Úloha 5. Najděte všechna řešení následujících rovnic a nerovnic v \mathbb{R} .

(a) $x^2 - x - 2 \geq 0$

(b) $\frac{(x+1)(x+2)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0$

(c) $\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x+1}{x+2}$

(d) $(x-1)(x+2)(x-3) > 0$

(e) $\frac{x-1}{x-3} \geq 0$

(f) $3x^2 - 2x + 2 = 0$.

Úloha 6. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pomocí matematické indukce nebo jinak:

(a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$

(d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.