1.úkol z MA1 **26. 9. 2023**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{(x+3)^2(x-1)}{x+4} \geq 0 \ .$$

Řešení napište ve tvaru sjednocení interval, např. $x \in \langle 1,2) \cup (3,\infty)$.

2. Načrtněte graf funkce

$$f(x) = |x^2 - 1| \ .$$

Dále najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{|x^2-1|}{2x-1} \geq x+1 \ .$$

Zde $|a|$ je absolutní hodnota pro $a \in \mathbb{R}$.

1.Úloha - Řešení:

Definiční obor výrazu je $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Znaménko součinu nebo podílu závisí na znaméncích jednotlivých členů. Vždy je $(x+3)^2 \geq 0$. Pokud je $(x+3)^2 > 0$ můžeme tento výraz vydělit a původní nerovnost se zachová. Tedy pro $x \neq -4$ je $\frac{(x+3)^2(x-1)}{x+4} \geq 0$ právě když

$$(x = -3 \ \vee \ \frac{(x-1)}{x+4} \geq 0) \ \wedge \ x \neq -4$$

neboli

$$x = -3 \ \vee \ (x - 1 \geq 0 \wedge x + 4 > 0) \ \vee \ (x - 1 \leq 0 \wedge x + 4 < 0)$$

tedy

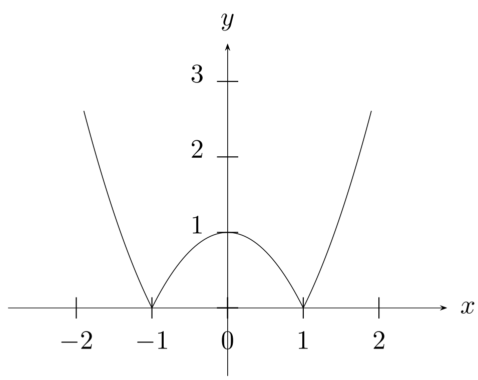
$$x = -3 \ \vee \ x \geq 1 \ \vee \ x < -4$$

a celkem

$$x \in (-\infty, -4) \cup \{-3\} \cup [1, \infty) \ .$$

2.Úloha - Řešení:

Graf f vznikne z grafu funkce $g(x) = x^2$ posunem o 1 níže a překlopením části, co je pod osou x, nad osu x (to je to, co dělá absolutní hodnota).



Definiční obor výrazu je $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Využijeme $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ a rozdělíme řešení podle znaménka výrazu $x^2 - 1$, který je v absolutní hodnotě. Tedy pro $x \neq \frac{1}{2}$ je $\frac{|x^2-1|}{2x-1} \geq x + 1$ právě když

$$0 \leq \frac{|x^2 - 1|}{2x - 1} - (x + 1) = \frac{|x^2 - 1| - (2x - 1)(x + 1)}{2x - 1}$$

Další úpravy rozdělíme podle znaménka výrazu uvnitř absolutní hodnoty.

- Pro $x \in (-1, 1)$, $x \neq \frac{1}{2}$ je $|x^2 - 1| = 1 - x^2$:

$$0 \leq \cdots = \frac{(1 - x^2) - (2x - 1)(x + 1)}{2x - 1} = \frac{(x + 1)(1 - x - 2x + 1)}{2x - 1} = \frac{(x + 1)(-3x + 2)}{2x - 1}$$

Protože výraz $x + 1$ je nyní kladný, tak je nerovnost ekvivalentní případu $\frac{-3x+2}{2x-1} \geq 0$, což je právě když $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ a tato množina spadá pod náš předpoklad $x \in (-1, 1)$, $x \neq \frac{1}{2}$.

- Pro $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ je $|x^2 - 1| = x^2 - 1$:

$$0 \leq \cdots = \frac{(x^2 - 1) - (2x - 1)(x + 1)}{2x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1 - 2x + 1)}{2x - 1} = \frac{(x + 1)(-x)}{2x - 1}$$

Pro $x \in [1, \infty)$ tato nerovnost zjevně není splněna a pro $x \in (-\infty, -1]$ naopak ano.

Celkem tedy máme

$$x \in (-\infty, -1] \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \ .$$