10. cvičení z Matematické analýzy 1

27. listopadu - 1. prosince 2023

Úloha 1. Pro funkce dané uvedenými předpisy vyřešte jednu z následujících úloh:

(i) Určete maximální intervaly monotonie a vyšetřete lokální extrémy. Rozhodněte, zda případně nalezené lokální extrémy jsou i globální, tedy extrémy na celém definičním oboru. (Základní typ úlohy, může se hodit také posoudit paritu.)

(ii) Vyšetřete průběh funkce v plném rozsahu, tj. chceme znát:

definiční obor, symetrii (parita, periodicita), průsečíky se souřadnými osami, obor spojitosti, jednostranné limity (nebo jejich neexistence), v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti, diferencovatelnost, (jednostranné) derivace ve významných bodech (průsečíky s osami, body nediferencovatelnosti), maximální intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, maximální intervaly konvexity a konkavity, inflexe, asymptoty, náčrt grafu.

(a) $f(x) = (x+1)|x-3| + 1$

(b) $f(x) = xe^{-|x|}$

(c) $f(x) = 2x^2 + \ln|x|$

(d) $f(x) = \ln \dfrac{|x|}{x+1}$

(e) $f(x) = x^3 + 9x^2 - 27|x|$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$

(g) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$

(h) $f(x) = \ln(2e^{3x} - 1)$

Úloha 2. Následující úlohy využívají metodu hledání extrému spojité funkce na omezeném uzavřeném intervalu pomocí lokalizace kandidátů.

(a) Do kruhu o poloměru r vepište obdélník maximálního obsahu.

(b) Najděte kvádr o daném objemu V se čtvercovou podstavou, který má minimální obsah povrchu.

(c) Při opakovaném měření jisté veličiny jsme získali hodnoty $x_1, \dots, x_n$. Určete nejlepší odhad hodnoty x měřené veličiny, tedy takový, pro který je minimalizována hodnota

$$\sum_{j=1}^{n} (x - x_j)^2 = (x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2.$$

(d) Určete rozměry válcové nádoby (s víkem, bez víka), která má při daném povrchu S největší objem.