10. úkol z MA1 **28. 11. 2023**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

Na tomto úkolu (částečně podobnému zkouškové písemce) si můžete vyzkoušet, jaké bodové ohodnocení byste mohli získat. Proto tento úkol neobsahuje žádný návod.

1. (10 bodů) Uvažujte funkci

$$f(x) = \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{(x^2+1)\operatorname{arctg}(-x^2)}$$

Vyšetřete limity této funkce v bodě ∞ a v bodě 0. Všechny kroky plně zdůvodněte.

2. (10 bodů) Uvažujte funkci danou předpisem

$$f(x) = \left|\ln(x^2 - 3x + 3)\right|$$

(a) Určete definiční obor funkce f.

(b) Určete všechny maximální intervaly monotonie funkce f.

(c) Určete všechny lokální extrémy funkce f a body, ve kterých se jich nabývá.

(d) Rozhodněte, zda f nabývá svých globálních extrémů (tj. extrémů na celém svém definičním oboru).

Všechny odpovědi náležitě zdůvodněte.

3. (10 bodů) Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (ANO = pravda, NE = nepravda). Pouze označte správnou odpověď, zdůvodnění v této otázce není vyžadováno ani bodováno. Správná odpověď je hodnocena 2 body, nesprávná -2 body, vynechaná žádným bodem. Je-li součet bodů získaných v této úloze záporný, do celkového hodnocení se pak započítává tato úloha s 0 body.

Tvrzení	**ANO**	**NE**
Z každé reálné posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lze vybrat její podposloupnost $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takovou, že posloupnost $\left(\frac{1}{1+\lvert a_{n_k}\rvert}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konverguje.		
Má-li funkce f v bodě x_0 lokální maximum, pak existuje $\varepsilon > 0$, že v intervalu $(x_0-\varepsilon, x_0)$ funkce f roste a v intervalu $(x_0, x_0+\varepsilon)$ klesá.		
Jsou-li obě funkce f, g konvexní na otevřeném intervalu, pak je tamtéž konvexní i funkce $\frac{1}{2}(f+g)$.		
Nechť funkce g je definována na nějakém okolí bodu x_0 a funkce f je definována na nějakém okolí bodu $y_0 = g(x_0)$. Jestliže neexistují derivace $f'(y_0)$ a $g'(x_0)$, pak také neexistuje $(f\circ g)'(x_0)$.		
Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li f monotonní na intervalu (a, b), je monotonní i na intervalu $\langle a, b\rangle$.		

Řešení 1:
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, takže limitu má smysl vyšetřovat v 0 i v ∞.

(a) <u>Limita pro $x \to 0$:</u>

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{(x^2+1)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{-x^2}{\operatorname{arctg}(-x^2)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(-x)\sin\tfrac{1}{x}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

Zde jsme použili aritmetiku limit, základní limity, větu o limitě složené funkce:

- $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{arctg} z} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0$
- vnitřní funkce $-x^2$ se vyhne hodnotě $z = 0$ na nějakém prsten. okolí bodu $x = 0$

a větu o policajtech

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & |(-x)\sin\frac{1}{x}| & \leq & |x| \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

(b) <u>Limita pro $x \to \infty$:</u>

$$f(x) = \underbrace{\frac{x^2}{(x^2+1)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{arctg}(-x^2)}}_{\to -\frac{2}{\pi}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{\to 1} \longrightarrow -\frac{2}{\pi}$$

Zde jsme použili aritmetiku limit, základní limity, úpravy výrazu (vytknutí převládajícího členu), větu o limitě složené funkce:

(1)
- $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- vnitřní funkce $\frac{1}{x}$ se vyhne hodnotě $z = 0$ na nějakém prsten. okolí ∞

(2)
- $\lim\limits_{z\to -\infty} \operatorname{arctg} z = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$
- vnitřní funkce $-x^2$ má nevlastní´ limitu pro $x \to \infty$

Řešení 2:

(a) $x^2 - 3x + 3 > 0$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ protože $D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 < 0$ a parabola je otočená vzhůru. Tedy $D(f) = \mathbb{R}$. Také lze použít doplnění na čtverec: $x^2 - 3x + 3 = (x - \frac{3}{2})^2 + (3 - \frac{9}{4}) > 0$.

(b) Funkci můžeme derivovat podle vět určitě tam, kde vnější funkce absolutní hodnota není 0. Tedy, kromě bodu, kdy $\ln(x^2 - 3x + 3) = 0$, což je právě když $x^2 - 3x + 3 = 1$ neboli $0 = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ tedy $x \in \{1, 2\}$.

Máme

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - 3x + 3) & , \ x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ -\ln(x^2 - 3x + 3) & , \ x \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$$

S vynecháním bodu $x \neq 1, 2$ platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x^2-3x+3} & , \ x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ -\frac{2x-3}{x^2-3x+3} & , \ x \in (1, 2) \end{cases}$$

Funkce $2x - 3$ je rostoucí a nulová v $x = \frac{3}{2}$. Celkem máme tato znaménka derivace

$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
x	$(-\infty, 1)$	$(1, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 2)$	$(2, \infty)$

Maximální intervaly monotonie jsou tedy výše uvedené intervaly, ke kterým přidáme hraniční body a příslušná monotonie odpovídá znaménku derivace. Zachování monotonie při přidání hraničních bodů plyne ze spojitosti funkce f. A maximalita plyne z toho, že zvětšením daného intervalu se na přidané části změní charakter monotonie (např. nerostoucí funkce se stane na přidané části rostoucí a podobně).

(c) Lokální extrémy ihned plynou z uvedených maximálních intervalů a jsou v jejich krajních bodech, tedy jsou v bodech $x = 1, 2$ (lokální minima) a $x = \frac{3}{2}$ (lokální maximum).

(d) Zřejmě v bodě $x = 1$ je minimum funkce f na intervalu $(-\infty, \frac{3}{2}\rangle$. A podobně v bodě $x = 2$ je minimum funkce f na intervalu $\langle \frac{3}{2}, \infty)$. Protože $f(1) = f(2) = 0$ je v obou bodech globální mimimum f na $\mathbb{R}$. (Nebo to také plyne z nezápornosti f).

V bodě $x = \frac{3}{2}$ není globální maximum, protože $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Řešení 3:

- *Z každé reálné posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lze vybrat její podposloupnost $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ takovou, že posloupnost $\left(\frac{1}{1+|a_{n_k}|} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ konverguje.*

  PLATÍ: Pokud je posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neomezená, pak z ní lze vybrat podposloupnost, která má za limitu buď ∞ nebo $-\infty$. Pokud je posloupnost $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ omezená, pak z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost (viz věta z přednášky). V každém případě tedy máme nějakou podposloupnost $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, která má limitu. Protože funkce $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ je spojitá a má konečnou limitu v ∞ a $-\infty$, plyne z věty o limitě složené funkce, že posloupnost $(f(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ konverguje.

- *Má-li funkce f v bodě x_0 lokální maximum, pak existuje $\varepsilon > 0$, že v intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ funkce f roste a v intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ klesá.*

  NEPLATÍ: Stačí vzít např. funkci $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^4, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ a $x_0 = 0$.

- *Jsou-li obě funkce f, g konvexní na otevřeném intervalu I, pak je tamtéž konvexní i funkce $\frac{1}{2}(f + g)$.*

  PLATÍ: Použijeme popis konvexity f a g v podobě:

$(\forall x, y \in I)(\forall \lambda \in (0,1))\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

$(\forall x, y \in I)(\forall \lambda \in (0,1))\ g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)$

Vynásobením obou nerovností $\frac{1}{2}$ a jejich sečtením dostaneme:

$$\underbrace{\frac{1}{2}f(\dots) + \frac{1}{2}g(\dots)}_{=\frac{f+g}{2}(\dots)} \leq (1-\lambda)\frac{f(x)+g(x)}{2} + \lambda\frac{f(y)+g(y)}{2}$$

což znamená, že $\frac{f+g}{2}$ je konvexní na intervalu I.

- *Nechť funkce g je definována na nějakém okolí bodu x_0 a funkce f je definována na nějakém okolí bodu $y_0 = g(x_0)$. Jestliže neexistují derivace $f'(y_0)$ a $g'(x_0)$, pak také neexistuje $(f \circ g)'(x_0)$.*

  NEPLATÍ: Stačí vzít $f(y) = \max\{0, y\}$ a $g(x) = -|x|$ a bod $x_0 = 0$. Pak je $(f \circ g)(x) = \max\{0, -|x|\} = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- *Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li f monotonní na intervalu (a, b), je monotonní i na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

  PLATÍ: Buď je to přímo věta z přednášky, nebo ji snadno dokážete sporem. Např. pro f neklesající na (a, b) a předpoklad, že $f(x_0) > f(b)$ pro nějaké $x_0 \in (a, b)$: Pak je $f(x_0) \geq f(b) + \varepsilon$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Tedy pro $x \in (x_0, b)$ je $f(x) \geq f(x_0) \geq f(b) + \varepsilon$ a přechodem k limitě $\lim\limits_{x\to b}$ dostaneme $f(b) \geq f(b) + \varepsilon$, což je spor.