11.úkol z MA1 **5. 12. 2023**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Najděte neurčitý integrál na maximálních intervalech.

$$\int \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(3x)\ \mathrm{d}x$$

2. Najděte neurčitý integrál na maximálních intervalech.

$$\int x \cdot \operatorname{arctg}(x+2)\ \mathrm{d}x$$

3. Najděte neurčitý integrál na maximálních intervalech.

$$\int \frac{1}{e^{2x} + e^{x} - 2}\ \mathrm{d}x$$

Návod: (1) Použijte opakovaně vzorec převádějící $\cos a \cdot \cos b$ na součet vhodných výrazů (pokud ho neznáte, odvoďte ho pomocí vzorců $\cos(a+b) = \dots$ a $\cos(a-b) = \dots$).

(2) Použijte vhodně metodu per partes. Racionální funkci přepište jako "polynom"+ "racionální funkce, kde stupeň ve jmenovateli je větší než stupeň v čitateli". U integrálu z výrazu $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ použijte postupy z přednášky.

(3) Použijte substituci, která se nabízí. Výslednou racionální funkci rozložte na parciální zlomky a pak integrujte pomocí postupu z přednášky.

Řešení 1:

Použijeme vzorec

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$$

který plyne ze vztahu

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b\ .$$

Tedy

$$\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\big(\cos(3x) + \cos(-x)\big) \cdot \cos(3x) =$$

$$= \frac{1}{4}\big(\cos(6x) + \cos 0 + \cos(2x) + \cos(-4x)\big)$$

a

$$\int \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(3x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}\big(\cos(6x) + 1 + \cos(2x) + \cos(4x)\big)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(6x)}{6} + \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{2} + x\right) + C$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Řešení 2:

Použijeme metodu per partes

$$\int x \cdot \operatorname{arctg}(x+2)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+2) - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2}\ \mathrm{d}x$$

a rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x^2}{1+(x+2)^2} = \frac{(x^2+4x+5) - 4x - 5}{x^2+4x+5} = 1 - \frac{4x+8-8+5}{x^2+4x+5} =$$

$$= 1 - \frac{4(x+2)}{1+(x+2)^2} + \frac{3}{1+(x+2)^2}$$

a tedy snadno dostaneme

$$\int \frac{x^2}{1+(x+2)^2}\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x - 2\int \frac{2(x+2)}{1+(x+2)^2}\ \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{1+(x+2)^2}\ \mathrm{d}x =$$

$$= x - 2 \cdot \ln\big(1+(x+2)^2\big) + 3 \cdot \operatorname{arctg}(x+2) + C$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zde jsme použili substituce

- v prvním případě: $t = 1 + (x+2)^2$ a $\int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \ln|t| + \text{konst.}$
- v druhém případě $s = x + 2$ a $\int \frac{1}{1+s^2}\ \mathrm{d}s = \operatorname{arctg}(s) + \text{konst.}$

Takže celkem

$$\int x \cdot \operatorname{arctg}(x+2)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2-3}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+2) - \frac{x}{2} + \ln\big(1+(x+2)^2\big) + C'$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Řešení 3:

Nejdříve si určíme definiční obor funkce $f(x)$ pod integrálem: V čitateli je kvadratická funkce v proměnné $t = e^x$. Konkrétně je $e^{2x} + e^x - 2 = (e^x+2)(e^x-1)$ a tento výraz je nulový právě jen pro $x = 0$. Tedy definiční obor je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Použijeme substituci $t = e^x$ (a funkci předtím rozšíříme výrazem $\frac{e^x}{e^x}$):

$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{(e^{2x}+e^x-2)e^x}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = e^x \\ \mathrm{d}t = e^x\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{(t^2+t-2)t}\ \mathrm{d}t$$

přičemž poslední integrál nás zajímá jen pro $t \in (0,1) \cup (1,\infty)$ (protoze $t = e^x > 0$ a $t = e^x \neq 1$).

Nyní použijeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(t^2+t-2)t} = \frac{1}{(t+2)(t-1)t} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t} = \frac{A(t-1)t + B(t+2)t + C(t+2)(t-1)}{(t+2)(t-1)t} =$$

$$= \frac{(A+B+C)t^2 + (-A+2B+C)t - 2C}{(t+2)(t-1)t}$$

tj. porovnáním koeficientů u monočlenů máme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A+2B+C &= 0 \\ -2C &= 1 \end{aligned}$$

s řešením $C = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{3}$ a $A = \frac{1}{6}$.

Pro $t \in (0,1) \cup (1,\infty)$ tedy máme

$$\int \frac{1}{(t^2+t-2)t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int \frac{1}{t+2}\ \mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int \frac{1}{t-1}\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|t+2| + \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{6}\big(\ln|t+2| + 2\ln|t-1| - 3\ln|t|\big) + C_i =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t+2)(t-1)^2}{t^3}\right| + C_i$$

kde C_1 je konstanta pro $t \in (0,1)$ a C_2 je konstanta pro $t \in (1,\infty)$.

Celkem máme

$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(e^x+2)(e^x-1)^2}{e^{3x}}\right| + C_i = \frac{1}{6}\ln\frac{(e^x+2)(e^x-1)^2}{e^{3x}} + C_i$$

kde výraz v argumentu absolutní hodnoty je ve skutečnosti nezáporný a

- konstanta C_1 je pro taková x, že $e^x \in (0,1)$, tedy $x \in (-\infty,0)$;
- konstanta C_2 je pro taková x, že $e^x \in (1,\infty)$, tedy $x \in (0,\infty)$.