12.úkol z MA1 **12. 12. 2023**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Najděte všechny primitivní funkce

$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x}\,\mathrm{d}x$$

na intervalu $(-\pi, \pi)$.

2. Stanovte hodnoty následujícího určitého integrálu.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x}\,\mathrm{d}x$$

3. Stanovte hodnoty následujícího určitého integrálu.

$$\int_{2}^{5} \sqrt{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$$

Návod: (1) Zde je už potřeba použít substituci $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$. Připomeňte si, jak se v tom případě vyjadřuje $\sin x$ a $\cos x$ pomocí t a jak "dosazovat" za $\mathrm{d}x$ (pomůckou je vztah $x = 2 \cdot \mathrm{arctg}(t)$, tedy $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$).

(2) Protože funkce je tvaru $R(\cos^2 x, \sin^2 x, \cos x \sin x)$ pro racionální funkci třech proměnných, využijte substituce $t = \mathrm{tg}(x)$. Opět si připomeňte, jak se v tom případě vyjadřuje $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ a $\sin x \cdot \cos x$ pomocí t a jak "dosazovat" za $\mathrm{d}x$.

(3) Graf funkce je částí hyperboly. Využijte proto substituci pomocí hyperbolických funkcí, konkrétně $x = 2\cosh(t)$ na vhodném intervalu. Následně použijte základní vzorce, podobně jako pro goniometrické funkce:

$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$ a $1 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, ze kterých si odvodte vzorec pro $\sinh^2(t) = \ldots$ využívající dvojnásobný argument (je to podobné jako pro $\sin^2(t)$). Dále už postupujte podobně jako když integrujete např. $\sin(5x)$ nebo e^{4x} atd.

Řešení 1:

Funkce má definiční obor celé $\mathbb{R}$, protože $\cos x \neq \frac{5}{3}$ pro libovolné x.

Použijeme substituci $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$, která je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ostře rostoucí. Pak pro $x \in (-\pi, \pi)$ je

$$\cos x = \cos^2(\tfrac{x}{2}) - \sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}{1 + \mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = 2\sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x}{2}) = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}{1 + \mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1 + t^2}\mathrm{d}t\ .$$

Poslední vztah plyne

- buď z

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = 1 + \mathrm{tg}^2(\tfrac{x}{2}) = 1 + t^2$$

- nebo přímo z $x = 2 \cdot \mathrm{arctg}(t)$ jako

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1 + t^2}\ \mathrm{d}t\ .$$

Takže

$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x}\ \mathrm{d}x = \{t = \mathrm{tg}(\tfrac{x}{2})\} = \int \frac{1}{5 - 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{2}{5(1 + t^2) - 3(1 - t^2)}\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{1 + 4t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1 + (2t)^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2t) + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2\mathrm{tg}(\tfrac{x}{2})\right) + C$$

pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$.

Řešení 2:

Definiční obor funkce f je

$$D(f) : \sin x \neq 0\ \wedge\ \sin x \neq 5\cos x\ \wedge x \in \langle \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3} \rangle$$

$$D(f) : \sin x \neq 0\ \wedge\ \mathrm{tg}(x) \neq 5\ \wedge x \in \langle \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3} \rangle$$

tedy $D(f) = \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \rangle$ protože $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} < 5$ a tedy $\frac{\pi}{3} = \mathrm{arctg}(\sqrt{3}) < \mathrm{arctg}(5)$.

Protože funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x}$ je tvaru

$$f(x) = R(\cos^2 x, \sin^2 x, \cos x \sin x)$$

pro racionální funkci $R(a,b,c) = \dfrac{1}{b-5c}$, využijeme substituce $t = \operatorname{tg}(x)$.

Jiný argument pro tuto substituci je, že funkce je tvaru

$$f(x) = Q(\sin x, \cos x)$$

pro racionální funkci $Q(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{\beta^2 - 5\alpha\beta}$, která má vlastnost $Q(-\alpha,-\beta) = Q(\alpha,\beta)$ pro všechna α, β z definičního oboru funkce f.

Integrál určujeme pro $x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \rangle$, kde je substituce $t = \operatorname{tg}(x)$ monotonní a diferencovatelná. Obecně pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ máme

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \frac{\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Krajní body intervalu se přitom převedou takto:

$$\tfrac{\pi}{4} \mapsto \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{4}) = 1$$
$$\tfrac{\pi}{3} \mapsto \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x}\,\mathrm{d}x = \{t = \operatorname{tg}(x)\} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} - 5\cdot\frac{t}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 - 5t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t-5} - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\Big[\ln|t-5| - \ln|t|\Big]_1^{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{1}{5}\Big(\ln(5-\sqrt{3}) - \ln\sqrt{3} - \ln 4\Big) = \frac{1}{5}\ln\tfrac{5-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

Použili jsme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(t-5)t} = \frac{A}{t-5} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(t-5)}{(t-5)t} = \frac{-5B + (A+B)t}{(t-5)t}$$

tedy $A = \frac{1}{5}$ a $B = -\frac{1}{5}$.

Řešení 3:
Nejjednodušší bude převést integrál nejdříve na funkci $\sqrt{y^2-1}$. Tedy

$$\int_2^5 \sqrt{x^2-4}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} x = 2y \\ dx = 2\ dt \end{array} \right\} = 4 \int_1^{5/2} \sqrt{y^2-1}\ \mathrm{d}y$$

Graf funkce $g(y) = \sqrt{y^2-1}$ je částí hyperboly $z^2 = y^2 - 1$. Využijeme proto substituci pomocí hyperbolických funkcí, konkrétně $y = \cosh(t)$. Důvodem, proč volit cosinus hyperbolický a ne sinus hyperbolický jsou příslušné vzorce:

$$\begin{array}{rcl} \cosh(2t) & = & \cosh^2(t) + \sinh^2(t) \\ 1 & = & \cosh^2(t) - \sinh^2(t) \end{array}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\sinh^2(t) = \frac{\cosh(2t) - 1}{2}$$

a derivováním dostaneme, že

$$2\sinh(t)\cosh(t) = \sinh(2t)$$

což se take bude hodit. Přitom je

$$\operatorname{arccosh}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2-1})$$

pro $t \geq 1$.
Další integrování bude jednodušší vyjádřit s obecnou horní mezi α, $\alpha > 1$.

$$\int_1^{\alpha} \sqrt{y^2-1}\ \mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{c} y = \cosh(t) \\ \mathrm{d}y = \sinh(t)\ dt \end{array} \right\} = \int_{\operatorname{arccosh}(1)}^{\operatorname{arccosh}(\alpha)} \sinh(t)\sqrt{\cosh^2(t) - 1}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arccosh}(\alpha)} \sinh(t) \cdot |\sinh(t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{arccosh}(\alpha)} \sinh^2(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arccosh}(\alpha)} \frac{\cosh(2t) - 1}{2}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{\operatorname{arccosh}(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\cosh(t)\sinh(t) - t \Big]_0^{\operatorname{arccosh}(\alpha)} = \left\{ \begin{array}{c} \sinh(t) = \sqrt{\cosh^2(t) - 1} \\ \text{pro } t \geq 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \ \operatorname{arccosh}(\alpha) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) \right)$$

Tedy pro $\alpha = 5/2$ je

$$\int_2^5 \sqrt{x^2-4}\ \mathrm{d}x = 4 \int_1^{5/2} \sqrt{y^2-1}\ \mathrm{d}y = \tfrac{5}{2}\sqrt{21} - 2\ln\tfrac{5+\sqrt{21}}{2}\ .$$