13.úkol z MA1 **19. 12. 2023**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Rozhodněte, zda existuje (klasický nebo zobecněný) Riemannův integrál. Pokud ano, určete jeho hodnotu.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

2. Rozhodněte, zda existuje (klasický nebo zobecněný) Riemannův integrál. Pokud ano, určete jeho hodnotu.

$$\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$$

3. Rozhodněte, zda existuje (klasický nebo zobecněný) Riemannův integrál. Pokud ano, určete jeho hodnotu.

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Návod: (1) Připomeňte si, co znamená zobecněný Riemannův integrál, a postupujte podle definice. Dále použijte obvyklý rozklad na parciální zlomky.

(2) Připomeňte si, co znamená zobecněný Riemannův integrál, a postupujte podle definice. Dále použijte metodu per partes.

(3) K nalezení primitivní funkce nemusíte používat substituce pomocí tangenty, stačí si všimnout ze čitatel je derivací jmenovatele. Dále pozorně určete definiční obor integrované funkce a podle toho postupujte podle definice zobecněného Riemannova integrálu. (Všeobecné poučení - není dobré nevěnovat pozornost definičnímu oboru...).

Řešení 1:

Protože $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$, je funkce $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$ definovaná a spojitá na $\langle 2,\infty)$. Na každém intervalu $\langle 2,r\rangle$, $r\geq 2$, je proto f Riemannovsky integrovatelná. Pro zobecněný integrál proto máme

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}\int_2^r \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

pokud limita existuje. Pro výpočet použijeme opět rozklad na parciální zlomky:

$$\int_2^r \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_2^r \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Big[\ln(x-1)-\ln(x+2)\Big]_2^r=$$

$$=\frac{1}{3}\Big(\ln\tfrac{r-1}{r+2}+\ln 4\Big)$$

Takže

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\cdots=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{3}\Big(\ln\underbrace{\tfrac{r-1}{r+2}}_{\to 1}+\ln 4\Big)=\frac{1}{3}\ln 4$$

kde jsme použili větu o limitě složené funkce:

- $\lim\limits_{z\to 1}\ln z=0$
- $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{r-1}{r+2}=1$
- vnější funkce je spojitá v $z=1$

Řešení 2:

Funkce $f(x)=x\ln x$ je definována a spojitá na každém intervalu $\langle\varepsilon,1\rangle$ pro každé $0<\varepsilon<1$. Tedy zde je Riemannovsky integrovatelná. Pro zobecněný integrál proto máme

$$\int_0^1 x\ln x\ \mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_\varepsilon^1 x\ln x\ \mathrm{d}x$$

pokud limita existuje. Pro výpočet použijeme metodu per partes:

$$\int_\varepsilon^1 x\ln x\ \mathrm{d}x=\left[\tfrac{x^2}{2}\ln x\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 \tfrac{x^2}{2}\cdot\tfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x=-\tfrac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon-\left[\tfrac{x^2}{4}\right]_\varepsilon^1=-\tfrac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon+\tfrac{\varepsilon^2}{4}-\tfrac{1}{4}$$

Takže

$$\int_0^1 x\ln x\ \mathrm{d}x=\cdots=\lim_{\varepsilon\to 0_+}-\underbrace{\tfrac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon}_{\to 0}+\tfrac{\varepsilon^2}{4}-\tfrac{1}{4}=-\tfrac{1}{4}$$

kde jsme použili L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{4}{\varepsilon^3}} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} -\frac{\varepsilon^2}{4} = 0$$

Řešení 3:

Na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$ není funkce $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ definována pouze v bodě $x = \frac{\pi}{4}$. Na intervalech $\langle 0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon\rangle$ a $\langle \frac{\pi}{4} + \varepsilon, \frac{\pi}{3}\rangle$ (pro dostatečně malá $\varepsilon > 0$) je funkce f spojitá, tedy Riemannovsky integrovatelná. Podle definice bude integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x$ existovat právě když budou existovat integrály $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x$ a jejich součet (tj. součet limit) bude mít smysl.

Máme

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_0^{\pi/4-\varepsilon} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0_+} \Big[\ln|\sin x - \cos x|\Big]_0^{\pi/4-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln|\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{4}-\varepsilon)}_{\to\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{4}-\varepsilon)}_{\to\frac{\sqrt{2}}{2}}| = -\infty$$

kde jsme použili větu o limitě složené funkce

- $\lim\limits_{z\to 0_+} \ln|z| = -\infty$
- $\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \sin(\frac{\pi}{4}-\varepsilon) - \cos(\frac{\pi}{4}-\varepsilon) = 0$
- vnitřní funkce, tj. $g(\varepsilon) = \sin(\frac{\pi}{4}-\varepsilon) - \cos(\frac{\pi}{4}-\varepsilon)$, se vyhne hodnotě $z = 0$ na nějakém pravém prstencovém okolí 0.

Podobně

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\pi/4+\varepsilon}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0_+} \Big[\ln|\sin x - \cos x|\Big]_{\pi/4+\varepsilon}^{\pi/3} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln|\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}| - \ln|\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{4}+\varepsilon)}_{\to\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{4}+\varepsilon)}_{\to\frac{\sqrt{2}}{2}}| = \infty$$

kde jsme použili větu o limitě složené funkce

- $\lim\limits_{z\to 0_+} \ln|z| = -\infty$
- $\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \sin(\frac{\pi}{4}+\varepsilon) - \cos(\frac{\pi}{4}+\varepsilon) = 0$

- vnitřní funkce, tj. $g(\varepsilon) = \sin(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) - \cos(\frac{\pi}{4} + \varepsilon)$, se vyhne hodnotě $z = 0$ na nějakém pravém prstencovém okolí 0.

Protože limity sice existují, ale hodnota "$-\infty + \infty$" nemá smysl, neexistuje ani integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\, \mathrm{d}x$.