2.úkol z MA1 **3. 10. 2023**

Odevzdání úkolu: na přístím cvičení z MA1

1. Pro reálné funkce

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ (definována jako zaokrouhlení na celé číslo dolů, např. $\lfloor 1,7 \rfloor = 1$, $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$) a

$g(x) = 3(x+2)^2 - 5$

najděte obrazy množin $A_1 = \mathbb{R}$, $A_2 = (-\frac{5}{2}, 3]$ a vzory množin $B_1 = (0,1)$, $B_2 = \{2\}$.
Tedy množiny $f(A_1)$, $f(A_2)$, $g(A_1)$, $g(A_2)$, $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$, $g^{-1}(B_1)$, $g^{-1}(B_2)$.

2. Pro reálné funkce dané předpisy $f(x) = \ln(x^2 - x)$ a $g(x) = \sqrt{x}$ najděte předpisy a definiční obory funkcí $f \circ g$ a $g \circ f$.

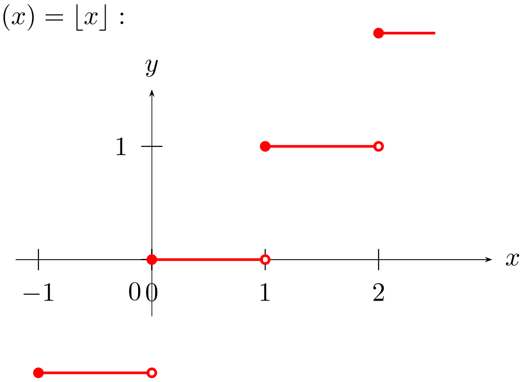
3. Najděte základní periodu pro každou z funkcí f a g. Mají společnou periodu? Pokud ano, jakou?

$f(x) = \sin\left(\frac{5x+9}{12}\right)$

$g(x) = \cos\left(\frac{2x}{35} - 11\right)$

(Základní perioda je nejmenší kladná perioda (pokud taková existuje), se kterou je funkce periodická).

1.Úloha - Řešení:
Pro $\varphi : X \to Y$ a $B \subseteq Y$ je $\varphi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in B\}$ (tedy vzor množiny B při zobrazení φ).
Graf funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor$:



Zřejmě je $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ a $f\big((-\frac{5}{2}, 3]\big) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Dále

$$f^{-1}\big((0,1)\big) = f^{-1}\big((0,1) \cap f(\mathbb{R})\big) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

protože $(0,1) \cap f(\mathbb{R}) = (0,1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. A nakonec

$$f^{-1}\big(\{2\}\big) = [2,3) \ .$$

Pro funkci g můžeme použít toto:

$$g(x) = (\alpha \circ h \circ \beta)(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, kde $\alpha(x) = 3x - 5$, $h(x) = x^2$, $\beta(x) = x + 2$.
Takže

$$g(\mathbb{R}) = \alpha\Big(h\big(\beta(\mathbb{R})\big)\Big) = \alpha\big(h(\mathbb{R})\big) = \alpha\big([0, +\infty)\big) = [-5, +\infty)$$

a podobně

$$g\big((-\tfrac{5}{2}, 3]\big) = \alpha\Bigg(h\Big(\beta\big((-\tfrac{5}{2}, 3]\big)\Big)\Bigg) = \alpha\Big(\underbrace{h\big((-\tfrac{1}{2}, 5]\big)}_{[0, \frac{1}{4}) \cup [0, 25]}\Big) = \alpha\big([0, 25]\big) = [-5, 70] \ .$$

Dále

$$g^{-1}\big((0,1)\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < 3(x+2)^2 - 5 < 1\}$$

$$0 < 3(x+2)^2 - 5 < 1 \ \Leftrightarrow \ 5 < 3(x+2)^2 < 6 \ \Leftrightarrow \ \tfrac{5}{3} < (x+2)^2 < 2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{\tfrac{5}{3}} < |x - (-2)| < \sqrt{2} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (-2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{\tfrac{5}{3}}) \cup (-2 + \sqrt{\tfrac{5}{3}}, -2 + \sqrt{2})$$

tedy

$$g^{-1}\big((0,1)\big) = (-2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{\tfrac{5}{3}}) \cup (-2 + \sqrt{\tfrac{5}{3}}, -2 + \sqrt{2})$$

kde jsme využili, že $|x - a| < \varepsilon$ znamená $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$ (a podobně $|x - a| > \varepsilon$).
A nakonec

$$g^{-1}\big(\{2\}\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3(x+2)^2 - 5 = 2\} = \{-2 - \sqrt{\tfrac{7}{3}}, -2 + \sqrt{\tfrac{7}{3}}\}$$

2.Úloha - Řešení:

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left((\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\right)$

   $D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \ \wedge \ \underbrace{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}}_{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x} > 1\} = (1, +\infty)$

   pro $x \in D(f \circ g)$ se pak může funkce upravit jako $(f \circ g)(x) = \ln\left(x - \sqrt{x}\right)$

2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\ln(x^2 - x)}$

   $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x > 0 \ \wedge \ \underbrace{\ln(x^2 - x) \geq 0}_{\Leftrightarrow \ x^2 - x \geq 1}\} =$

   $= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x^2 - x - 1 = (x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})\} = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$

3.Úloha - Řešení:

Nejdříve si uvědomme, že pokud $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodická s peridou $p > 0$ (tj. $h(x + p) = h(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$), pak funkce $k(x) = h(ax + b)$ (kde $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$) má periodu $\frac{p}{a}$.

Důkaz: $k(x + \frac{p}{a}) = h(a(x + \frac{p}{a}) + b) = h(ax + b + p) = h(ax + b) = k(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

To platí i naopak, tj. pokud má uvedená funkce k nějakou periodu $q > 0$, pak h má periodu aq (protože $h(y) = k(\frac{y}{a} - \frac{b}{a})$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$).

Tedy je zřejmé, jak se přechází mezi periodami od jedné funkce druhé. A proto - pokud má jedna z nich nejmenší kladnou periodu, má ji i ta druhá a mají mezi sebou uvedený vztah.

Protože funkce sin a cos mají nejmenší kladnou periodu (tj. základní periodu) rovnu 2π mají funkce

$f(x) = \sin\left(\frac{5x+9}{12}\right)$ základní periodu $\frac{12}{5} \cdot 2\pi = \frac{24}{5}\pi$

$g(x) = \cos\left(\frac{2x}{35} - 11\right)$ základní periodu $\frac{35}{2} \cdot 2\pi = 35\pi$

Dále si uvědomme, že pokud $p > 0$ je perioda funkce h, pak také np je perioda funkce h pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Tedy například $(7 \cdot 5^2) \cdot \frac{24}{5}\pi = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \pi = 24 \cdot 35\pi$ je společná perioda funkcí f a g.