13. cvičení z Matematické analýzy 1

18. - 22. prosince 2023

Úloha 1. Najděte následující určité integrály. Vždy nejdříve zkontrolujte, že integrand je riemannovsky integrovatelný na daném intervalu, např. protože je tam spojitý a omezený. Některé příklady vyžadují inverzní substituce.

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^3 \cosh(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_2^5 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

Úloha 2. Najděte následující určité integrály. V některých případech lze postup výrazně zjednodušit využitím různých geometrických pozorování. Číslo $r>0$ je parametr.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,\mathrm{arctg} x\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\arcsin x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-r}^r \left(e^{-2x}+\sin^{13}(x^5+\mathrm{arctg}(x^7))\right)\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^3 2^{|x^2-3x+2|}\cdot|2x-3|\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{-\frac{r\sqrt{2}}{2}}^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{r^2-x^2}-|x|\right)\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^r \chi_{[1,2]}(x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^5 \max\{\sin x,\cos x\}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_{-2}^4 \Big|\big||x-1|-1\big|-1\Big|\,\mathrm{d}x$

Úloha 3. Rozhodněte, zda existuje (klasický nebo zobecněný) Riemannův integrál. Pokud ano, určete jeho hodnotu.

(a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$