14. cvičení z Matematické analýzy 1

8. - 12. ledna 2024

Úloha 1. Rozhodněte, zda následující řady absolutně konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 1}{(n^2+1)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + 2n}{\cos\sqrt{n} - n^3}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1} - n}{n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1})$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2+1}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sinh\frac{n}{n^2-2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{3n^2+7}{7n^3+2}\right)$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(e^{\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}} - 1\right)$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\sqrt[3]{n}}$

Úloha 2. Určete, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(n^a))$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left(\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^a+1} - \sqrt{n^a-1}\right)$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3^{2n+1} + n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \ln\frac{n+1}{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+2} + n^a}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^a}$

Úloha 3. Rozhodněte, zda následující řady absolutně konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n + (-1)^n}{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + n}{2^n + 10}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n! + 10n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n^5}{n^4 + 5^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{3^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+4}\right)^{n^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n+2}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}+1}{5^{n^2}}}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^{10} + 10 \cdot 4^n}{n! - \pi^n}$ (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}$ (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+n+2}\right)^{n^4}$

Úloha 4. Rozhodněte, zda následující řady absolutně konvergují.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \arcsin \frac{n-1}{n}\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^2\right)$