2. cvičení z Matematické analýzy 1

2. - 6. října 2023

Úloha 1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou shora nebo zdola omezené. Najděte jejich supremum, infimum a maximum, minimum, existují-li.

(a) $\{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (c) $(-1, 2] \cup (3, 7]$

(d) $[0, 2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ (e) $\left[0, \frac{1}{5}\right] \cap \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (f) $\left\{\frac{p}{p+q} \middle| \, p, q \in \mathbb{N}\right\}$

(g) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N}\right\}$ (h) $\{m^2 - n^2 \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ (i) $\{n^{(-1)^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Úloha 2. Určete definiční obor reálných funkcí, kde funkční hodnota v bodě $x \in \mathbb{R}$ je dána předpisem:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 2\sqrt{1 - x} + \sqrt{x^2 + 1}$,

(b) $f(x) = \log(1 - \log(x^2 - 5x + 6))$,

(c) $f(x) = \arcsin \sqrt{\dfrac{2x + 1}{2}}$,

(d) $f(x) = \ln(\mathrm{tg}(x))$.

Úloha 3. Dokažte nebo vyvraťte, že funkce dané následujícími předpisy jsou sudé/liché:

(a) $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})$,

(b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Úloha 4. Doplňte následující tabulku (S = daná funkce je sudá, L = daná funkce je lichá, N = nelze obecně rozhodnout).

f	g	$f + g$	$f \cdot g$	$f \circ g$
S	S			
L	L			
S	L			
L	S			

Úloha 5. Charakterizujte (určete, právě jaké vlastnosti musejí mít) všechna zobrazení $f : X \to Y$, která splňují:

(a) $\forall A \subseteq X \quad f^{-1}(f(A)) = A$,

(b) $\forall B \subseteq X \quad f^{-1}(f(B)) = B$.