7. cvičení z Matematické analýzy 1

6. - 9. listopadu 2023

Úloha 1. Vyšetřete existenci následujících limit, případně jejich jednostranných verzí. Čísla $a, b \in (0, \infty)$ jsou parametry. Uvádějte zdůvodnění.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4^x+1}{4^x-1}\right)^{\frac{2^{2x+1}-1}{3^x+5}}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{\dfrac{3^x+1}{2^x+1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{\dfrac{a^x+b^x}{1+b^x}}$

Úloha 2. Určete, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jsou následující limity rovny nenulovému reálnému číslu.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\cdot 5^{n+1} + 3\cdot(-2)^{2n}\right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\cdot(-3)^{2n-1} - 5\cdot 7^{n+2}\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\cdot(-5)^{n-1} - 5\cdot 2^{2n+2}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot 3^n + (-1)^n}{4^n}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 2^n + (-3)^n}{3^n - 2^{2n+1}}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 2^n + (-3)^n}{3^n}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-4n} - n\right)$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+3} - 2n\right)$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n^3-2n+1} - \sqrt{n^3-n^2}\right)}{2n-4}$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3^{2n}+(-2)^{n+1}} - \sqrt{3^{2n}+4^n}\right)$

Úloha 3. Spočítejte následující limity nebo ukažte, že neexistují. Existují-li alespoň jednostranné limity, najděte ty. Uvádějte zdůvodnění.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{x^\alpha}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\ln^2(3+x)\right)}{(x+2)^\alpha}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{x^\alpha}$