8. cvičení z Matematické analýzy 1

13. - 17. listopadu 2023

Úloha 1. Má-li $f(x)$ daný tvar, najděte derivaci $f'(x)$. Uvádějte vždy, pro jaká x je získaný výraz hodnotou derivace původní funkce. Případné parametry v příkladech jsou uvedeny přímo v zadání.

- $\alpha x^2 + 3x^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
- $\sin \ln(x^3 + 1)$
- $\frac{1}{x^3} + 7\sqrt[5]{x}$
- $\frac{1}{\sqrt[4]{x+5}}$
- $\sqrt{x^2 + 1}$
- $3e^{2x} - \cos 6x$
- $\sinh x$
- $\sqrt[x-3]{x^2 + 5}$
- $\cosh x$
- $\frac{x^{2n} + 2}{x^{2n+1} - 1}$, $n \in \mathbb{N}$
- $\ln \ln \sin x$
- $\sqrt[4]{x^3} \sin x$
- $e^{4x-7} \cos 2x$
- x^x
- $\frac{\sin x}{\sin 2x}$
- $\frac{e^{x^2}}{\cos(2x + \pi)}$
- $(\sin x)^x$
- $\mathrm{tg}(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathrm{cotg}^\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $\beta^{\beta^x} + \beta^{x^\beta} + x^{\beta^\beta}$, $\beta > 0$
- $\mathrm{arctg}(x^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $\ln \mathrm{arctg} x$
- $(\mathrm{arctg}(x^4 + 9))^{\ln x}$

Úloha 2. Určete n-tou derivaci pro $n \in \mathbb{N}$ pro funkce

(a) $f(x) = \sin^2 x$ (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$.

Úloha 3. S pomocí Leibnitzovy formule $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ určete $h^{(20)}(x)$ pro funkci $h(x) = x^2 e^{2x}$.

Úloha 4. Ukažte, že diferenciální rovnici $y'' + y' - 2y = 0$ vyhovují funkce $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ pro $x \in \mathbb{R}$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.