1. cvičení z Matematické analýzy 1

23. - 27. září 2024

Úloha 1. Určete definiční obor a načrtněte graf funkce

(a) $f(x) = x^n$, kde $n \in \mathbb{Z}$ (tj. n je celé číslo),

(b) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, kde $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Kde jsou tyto funkce definovány? Jaký je vztah mezi grafy funkcí z (a) a (b)? Jak se mění graf funkce f, pokud měníme parametr n?

Úloha 2. Uvažujte funkci f danou předpisem $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Napište, jak v tomto konkrétním případě vypadají předpisy následujících funkcí g, a načrtněte jejich grafy:

(a) $g(x) = f(x+2)$ (b) $g(x) = f(x) + 2$ (c) $g(x) = f(2x)$ (d) $g(x) = 2f(x)$.

Úloha 3. Je-li $g(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a f reálná funkce, jaký vliv na graf funkce h mají dané parametry jestliže

(a) $h(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$,

(b) $h(x) = g(f(x)) = af(x) + b$.

Úloha 4. Načrtněte graf funkce $h(x) = \frac{1}{2}\sin\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ a popište, jakými transformacemi postupně vznikne z grafu funkce $f(x) = \sin(x)$.

Úloha 5. Načrtněte a vzájemně srovnejte grafy funkcí s následujícími předpisy:

(a) $f(x) = \sin(2x)$ (b) $f(x) = \sin(x+2)$ (c) $f(x) = 2 - \sin x$

(d) $f(x) = x + \sin x$ (e) $f(x) = x \sin x$ (f) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(g) $f(x) = \sin(x^2)$ (h) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ (i) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Úloha 6. Najděte všechna řešení následujících rovnic a nerovnic v $\mathbb{R}$.

(a) $x^2 - x - 2 \geq 0$ (b) $\dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0$ (c) $\dfrac{x+1}{x-1} \geq \dfrac{x+1}{x+2}$

(d) $(x-1)(x+2)(x-3) > 0$ (e) $\dfrac{x-1}{x-3} \geq 0$ (f) $3x^2 - 2x + 2 = 0$.

Úloha 7. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pomocí matematické indukce nebo jinak:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Poznámky k úlohám:
Úloha 3: Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ si označme tato zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- stejnolehlost (homotetie) $h_a(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$
- posunutí $p_b(x) = x + b$, $x \in \mathbb{R}$

Pak platí, že $p_b(h_a(x)) = ax + b = a(x + \frac{b}{a}) = h_a(p_{\frac{b}{a}}(x))$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Vidíme, že při skládání zobrazení homotetie a posunutí záleží na pořadí jejich skládání.

Mějme nyní reálnou funkci f. Pak

(i) graf funkce $f(h_b(x)) = f(x + b)$ vznikne z grafu funkce f posunutím o hodnotu $-b$ podél osy x (tedy o $|b|$ doprava, pokud $b < 0$; a hodnotu $|b|$ doleva, pokud $b > 0$).

(ii) pro $a > 0$ vznikne graf funkce $f(p_a(x)) = f(ax)$ z grafu funkce f stejnolehlostí s koeficientem $\frac{1}{a}$ podle osy x (vzhledem k počátku souřadnic), tedy roztažením $\frac{1}{a}$-krát, pokud $a \leq 1$; a smrštěním a-krát, pokud $a \geq 1$.

(iii) pro $a = -1$ vznikne graf funkce $f(p_a(x)) = f(-x)$ zrcadlením grafu funkce f podle svislé osy y.

Graf funkce $g(x) = f(ax + b)$ tedy získáme z grafu funkce f takto:

- pro $a > 0$: Máme $f(ax + b) = f(p_b(h_a(x)))$. Graf f posunume o $-b$ podle osy x (tím dostaneme graf funkce $f(p_b(x))$) a posunutý graf pak stejnolehlostí (vzhledem k počátku souřadnic) upravíme s koeficientem $\frac{1}{a}$.

  Můžeme také postupovat takto: $f(ax + b) = f(a(x + \frac{b}{a})) = f(h_a(p_{\frac{b}{a}}(x)))$. Graf f změníme stejnolehlostí (vzhledem k počátku souřadnic) s koeficientem $\frac{1}{a}$ a výsledek posunume o $-\frac{b}{a}$ podle osy x.

- pro $a < 0$: Máme $f(ax+b) = f(p_b(h_{|a|}(-x)))$. Postupujeme podobně jako výše, a nakonec přidáme zrcadlení podle osy y.

Můžeme využít ještě toho, jak vypadá popis stejnolehlosti s koeficientem a vzhledem k bodu $c \in \mathbb{R}$:

$$x \mapsto a(x - c) + c$$

(Speciálně: zrcadlení podle svislé osy procházející bodem c dostaneme pro $a = -1$ a má tvar $x \mapsto 2c - x$.)

Tedy (pro $a \neq 1$) platí vztah $ax + b = a(x - c) + c$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ právě když $c = \frac{b}{1-a}$.

Tedy graf funkce $f(ax + b)$ (pro $a \neq 1$) pak dostaneme z grafu funkce f pomocí stejnolehlosti (podél osy x) s koeficientem $\frac{1}{a}$ vzhledem k bodu $\frac{b}{1-a}$.

- -

Pro $af(x) + b$ postupujeme podobně, jen ve směru osy y. Tentokrát vznikne graf funkce

$$af(x) + b = p_b(h_a(f(x)))$$

z grafu funkce f stejnolehlostí s koeficientem a vzhledem k počátku souřadnic (podél osy y) a pak posunutím o b podél osy y.

Úloha 4: Graf funkce $h(x) = \frac{1}{2} \sin\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ vznikne z grafu funkce $f(x) = \sin(x)$ postupně takto:

(a) posunutím o $\frac{\pi}{2}$ doleva podél osy x (vznikne funkce $x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{2})$);

(b) smrštěním 2-krát podle osy x (vzhledem k počátku) a zrcadlením podle osy y (vznikne funkce $x \mapsto \sin(-2x + \frac{\pi}{2})$);

(c) smrštěním 2-krát podle osy y (vzhledem k počátku) (vznikne funkce $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(-2x + \frac{\pi}{2})$);

(d) posunutím o 1 směrem dolů podle osy y (vznikne výsledná funkce h).

Take můžeme funkci upravit takto:

$$h(x) = \frac{1}{2}\sin\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2}\cos\left(-2x\right) - 1 = \frac{1}{2}\cos\left(2x\right) - 1\ .$$