1.úkol z MA1 **24. 9. 2024**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{(x+1)(x+2)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \ .$$

Řešení napište ve tvaru sjednocení intervalů.

2. Dokažte pomocí matematické indukce:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

1.Úloha - Řešení:

Definiční obor výrazu je $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Znaménko součinu nebo podílu závisí na znaméncích jednotlivých členů. Vždy je $(x+2)^2 \geq 0$. Pokud je $(x+2)^2 > 0$ můžeme tento výraz vydělit a původní nerovnost se zachová. Tedy pro $x \neq 1, 2$ je $\frac{(x+1)(x+2)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0$ právě když

$$\left(x = -2 \ \vee \ \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} \geq 0\right) \ \wedge \ x \neq 1, 2$$

neboli

$$x = -2 \ \vee \ \Big(x + 1 \geq 0 \ \wedge \ (x-1)(x-2) > 0\Big) \ \vee \ \Big(x + 1 \leq 0 \ \wedge \ (x-1)(x-2) < 0\Big)$$

(Graf funkce $f(x) = (x-1)(x-2)$ je parabola otočená vzhůru, a můžeme tak snadno určit znaménko daného výrazu. Odsud máme další úpravu jako:)

$$x = -2 \ \vee \ \Big(x \geq -1 \ \wedge \ x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)\Big) \ \vee \ \Big(x \leq -1 \ \wedge \ x \in (1, 2)\Big)$$

$$x = -2 \ \vee \ x \in \langle -1, 1) \cup (2, \infty)$$

a celkem

$$x \in \{-2\} \cup \langle -1, 1) \cup (2, \infty) \ .$$

2.Úloha - Řešení:

Pro $n = 1$ rovnost platí:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} \ .$$

Indukční krok: Nechť rovnost platí pro dané $n \in \mathbb{N}$, tedy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \ .$$

Ukážeme, že pak platí také pro $n + 1$. Máme

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right)}_{\text{ind. předp.} \frac{n}{2n+1}} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} =$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

což jsme chtěli ukázat.