10. úkol z MA1 **26. 11. 2024**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Uvažujte funkci danou předpisem

$$f(x) = \left|\ln(x^2 - 3x + 3)\right|$$

(a) Určete definiční obor funkce f.

(b) Určete všechny maximální intervaly monotonie funkce f.

(c) Určete všechny lokální extrémy funkce f a body, ve kterých se jich nabývá.

(d) Rozhodněte, zda f nabývá svých globálních extrémů (tj. extrémů na celém svém definičním oboru).

Všechny odpovědi náležitě zdůvodněte.

Řešení:

(a) $x^2 - 3x + 3 > 0$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ protože $D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 < 0$ a parabola je otočená vzhůru. Tedy $D(f) = \mathbb{R}$. Také lze použít doplnění na čtverec: $x^2 - 3x + 3 = (x - \frac{3}{2})^2 + (3 - \frac{9}{4}) > 0$.

(b) Funkci můžeme derivovat podle vět určitě tam, kde vnější funkce absolutní hodnota není 0. Tedy, kromě bodu, kdy $\ln(x^2 - 3x + 3) = 0$, což je právě když $x^2 - 3x + 3 = 1$ neboli $0 = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ tedy $x \in \{1, 2\}$.

Máme

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - 3x + 3) & , \ x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ -\ln(x^2 - 3x + 3) & , \ x \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$$

S vynecháním bodu $x \neq 1, 2$ platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x^2-3x+3} & , \ x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ -\frac{2x-3}{x^2-3x+3} & , \ x \in (1, 2) \end{cases}$$

Funkce $2x - 3$ je rostoucí a nulová v $x = \frac{3}{2}$. Celkem máme tato znaménka derivace

$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
x	$(-\infty, 1)$	$(1, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 2)$	$(2, \infty)$

Maximální intervaly monotonie jsou tedy výše uvedené intervaly, ke kterým přidáme hraniční body a příslušná monotonie odpovídá znaménku derivace. Zachování monotonie při přidání hraničních bodů plyne ze spojitosti funkce f. A maximalita plyne z toho, že zvětšením daného intervalu se na přidané části změní charakter monotonie (např. nerostoucí funkce se stane na přidané části rostoucí a podobně).

(c) Lokální extrémy ihned plynou z uvedených maximálních intervalů a jsou v jejich krajních bodech, tedy jsou v bodech $x = 1, 2$ (lokální minima) a $x = \frac{3}{2}$ (lokální maximum).

(d) Zřejmě v bodě $x = 1$ je minimum funkce f na intervalu $(-\infty, \frac{3}{2}\rangle$. A podobně v bodě $x = 2$ je minimum funkce f na intervalu $\langle \frac{3}{2}, \infty)$. Protože $f(1) = f(2) = 0$ je v obou bodech globální mimimum f na $\mathbb{R}$. (Nebo to také plyne z nezápornosti f).

V bodě $x = \frac{3}{2}$ není globální maximum, protože $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.