12.úkol z MA1 **10. 12. 2024**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Najděte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x} \, \mathrm{d}x$$

na intervalu $(-\pi, \pi)$.

2. Stanovte hodnotu následujícího určitého integrálu.

$$\int_0^1 \sqrt{2 - x^2} \, \mathrm{d}x$$

Návod: (1) Zde je potřeba použít substituci $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$. Připomeňte si, jak se v tom případě vyjadřuje $\sin x$ a $\cos x$ pomocí t a jak "dosazovat"za dx (pomůckou je vztah $x = 2 \cdot \mathrm{arctg}(t)$, tedy $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{dt}$).

(2) Pro výpočet určitého integrálu použijte Newton-Leibnitzovu formuli. Graf funkce je částí kružnice. Využijte proto substituci pomocí goniometrických funkcí, konkrétně $x = \sqrt{2} \cdot \sin(t)$ na vhodném intervalu. Pak použijte vzorce pro dvojnásobný argument kosinu.

Řešení 1:

Funkce má definiční obor celé $\mathbb{R}$, protože $\cos x \neq \frac{5}{3}$ pro libovolné x.

Použijeme substituci $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$, která je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ostře rostoucí. Pak pro $x \in (-\pi, \pi)$ je

$$\cos x = \cos^2(\tfrac{x}{2}) - \sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}{1 + \mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = 2\sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x}{2}) = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}{1 + \mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1 + t^2}\mathrm{d}t \ .$$

Poslední vztah plyne

- buď z

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = 1 + \mathrm{tg}^2(\tfrac{x}{2}) = 1 + t^2$$

- nebo přímo z $x = 2 \cdot \mathrm{arctg}(t)$ jako

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1 + t^2}\ \mathrm{d}t \ .$$

Takže

$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x}\ \mathrm{d}x = \{t = \mathrm{tg}(\tfrac{x}{2})\} = \int \frac{1}{5 - 3 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{2}{5(1 + t^2) - 3(1 - t^2)}\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{1 + 4t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1 + (2t)^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2t) + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2\mathrm{tg}(\tfrac{x}{2})\right) + C$$

pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$.

Řešení 2:

Graf funkce $y = g(x) = \sqrt{2 - x^2}$ je částí kružnice $x^2 + y^2 = 2$ s poloměrem $\sqrt{2}$. Využijeme proto substituci pomocí goniometrických funkcí, konkrétně $x = \sqrt{2}\sin t$. Důvodem je vzorec:

$$\sin^2 t + \cos^2 t \ = \ 1$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Máme pak

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} x = \sqrt{2}\sin t \\ \mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos t\ dt \\ 0 \leftarrow 0 \\ 1 \leftarrow \pi/4 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\cos t \cdot \sqrt{2}\ \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t \text{ pro } t\in[0,\pi/4]} \ =$$

$$= \int_0^{\pi/4} 2\cos^2 t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} 1+\cos(2t)\ \mathrm{d}t = \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$