13. úkol z MA1 **18. 12. 2024**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Rozhodněte, zda následující řada absolutně konverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^{10} + 10 \cdot 4^n}{n! - \pi^n}$$

2. Rozhodněte, zda následující řada absolutně konverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n \right)$$

Návod: (1) Nejdříve ověřte, že zadaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je dobře definovaná, a že má kladné členy počínaje nějakým indexem n. Zamyslete se, jaká je limita posloupnosti $\frac{c^n}{n!}$ pro $c \in \mathbb{R}$ a proč. Pak použijte limitní podílové kritérium, kde vše řádně zdůvodněte.

Je možné postupovat i pozvolněji - použít nejdříve limitní srovnávací kritérium s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde členy b_n budou zjednodušené členy a_n (v čitateli a jmenovateli ponechte vedoucí členy). Pro chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ využijte limitní podílové kritérium.

(2) Použijte limitní srovnávací kritérium s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ pro vhodné $a > 0$. K výpočtu příslušné limity použijte L'Hospitalovo pravidlo, které vám ukáže, jak vhodně zvolit hodnotu parametru a, abychom mohli rozhodnout o chování původní řady.

Řešení 1:

Nejdříve si ukážeme, že členy a_n jsou kladné od nějakého n_0. Máme

$$n! - \pi^n = n! \cdot \left(1 - \frac{\pi^n}{n!}\right)$$

a pomocí odhadu (pro $n \geq 4$)

$$0 \leq \frac{\pi^n}{n!} = \frac{\pi^n}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 5 \cdots n} \leq \frac{\pi^3 \cdot \pi^{n-3}}{6 \cdot 4^{n-3}} = \frac{\pi^3}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n-3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

vidíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi^n}{n!} = 0$. Díky této limitě je $n! - \pi^n = n! \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\pi^n}{n!}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \frac{n!}{2} > 0$ od nějakého n_0 a tedy členy a_n jsou kladné od nějakého n_0.

Poznámka: Takovouto informaci nemusíme nutně vždy využít. Pokud bychom ji ale neměli a stalo by se, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ by divergovala, pak bychom obecně nemohli říct, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Víme proto, že absolutní konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je totéž jako (obyčejná) konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dále máme

$$a_n = \frac{3n^{10} + 10 \cdot 4^n}{n! - \pi^n} = \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{\frac{3n^{10}}{4^n} + 10}{1 - \frac{\pi^n}{n!}}$$

tedy zvolíme srovnání s jednodušší řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $b_n = \frac{4^n}{n!}$.

Díky limitnímu srovnávacímu kritériu a limitě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^{10}}{4^n} + 10}{1 - \frac{\pi^n}{n!}} = 10 \in (0, \infty)$$

kde jsme využili výše zmíněnou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi^n}{n!} = 0$ a limitu z přednášky $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $a > 1$ (v rámci věty o limitě složené funkce a posloupnosti), máme, že

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně } \Leftrightarrow \text{ řada} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje absolutně.}$$

Nyní vyšetříme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ např. pomocí limitního podílového kritéria. Máme

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^n} = \frac{4}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

a proto řada s členy b_n absolutně konverguje a tedy i *řada s členy a_n absolutně konverguje.*

Řešení 2:

Řada má všechny členy kladné. Prozkoumáme rychlost konvergence funkce

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x^2)$$

v okolí ∞. Tedy uvažujme limitu pro (zatím neznámé) $a > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x^2)}{\frac{1}{x^a}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2x}{1+x^4}}{-\frac{a}{x^{a+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{a} \cdot \frac{x^{a+2}}{1+x^4} \stackrel{(a=2)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1$$

Předpoklady pro L'Hospitalovo pravidlo byly splněny (tvar $\frac{0}{0}$) a po volbě $a = 2$ máme příslušnou limitu. Toto využijeme v limitním srovnávacím kritériu:

- $a_n = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(n^2\right)$
- $b_n = \dfrac{1}{n^2}$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 1 \in (0, \infty)$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz přednáška), proto konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

A tedy řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.