14. cvičení z Matematické analýzy 1

6. - 10. ledna 2025

Úloha 1. Rozhodněte, zda následující řady absolutně konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 1}{(n^2+1)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + 2n}{\cos\sqrt{n} - n^3}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1} - n}{n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1})$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2+1}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sinh\frac{n}{n^2-2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{3n^2+7}{7n^3+2}\right)$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(e^{\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}} - 1\right)$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\sqrt[3]{n}}$

Úloha 2. Určete, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^a}\right)\right)$, $a \geq 0$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^a+1} - \sqrt{n^a-1}\right)$, $a > 0$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3^{2n+1} + n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \ln\frac{n+1}{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+2} + n^a}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^a}$

Úloha 3. Rozhodněte, zda následující řady absolutně konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n + (-1)^n}{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + n}{2^n + 10}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n! + 10n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n^5}{n^4 + 5^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{3^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+4}\right)^{n^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n+2}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}+1}{5^{n^2}}}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^{10} + 10 \cdot 4^n}{n! - \pi^n}$ (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}$ (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+n+2}\right)^{n^4}$

Úloha 4. Rozhodněte, zda následující řady absolutně konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n-1}{n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^2\right)$

Úloha 1: V této úloze mají členy ve všechny řadách od nějakého indexu n_0 konstantní znaménko, takže absolutní konvergence odpovídá konvergenci původní řady (což znamená, že řada buď absolutně konverguje nebo diverguje - možnost neabsolutní konvergence zde nenastává).

Pro vyšetření konvergence v této úloze vždy stačí limitního pomocí srovnávacího kritéria (LSK) srovnat danou řadu s řadou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, která pro $p > 1$ konverguje a pro $p \leq 1$ diverguje.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 3n}{n^2} = \dfrac{\frac{(-1)^n}{n} + 3}{n}$, volíme $b_n = \dfrac{1}{n}$ takže $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{(-1)^n}{n} + 3 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3 \in (0, \infty)$

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n}$ diverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n diverguje.

(b) $a_n = \dfrac{n^2 - 4n + 1}{(n^2+1)^2} = \dfrac{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{(1 + \frac{1}{n^2})^2} \cdot \dfrac{n^2}{n^4}$, volíme $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ takže pro $n \geq 3$ je

$\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{(1 + \frac{1}{n^2})^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \in (0, \infty)$.

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n^2}$ konverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n absolutně konverguje.

(c) $a_n = \dfrac{\sin n + 2n}{\cos\sqrt{n} - n^3} = \dfrac{\frac{\sin n}{n} + 2}{\frac{\cos\sqrt{n}}{n^3} - 1} \cdot \dfrac{n}{n^3}$, volíme $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ takže

$\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{\frac{\sin n}{n} + 2}{1 - \frac{\cos\sqrt{n}}{n^3}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \in (0, \infty)$.

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n^2}$ konverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n absolutně konverguje.

(d) $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2} = \dfrac{(n+4) - (n+2)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, volíme $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

takže $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{2}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \in (0, \infty)$

Řada s členy $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n diverguje.

(e) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2-1} - n}{n} = \dfrac{n^2 - 1 - n^2}{n(\sqrt{n^2-1} + n)} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1} \cdot \dfrac{1}{n^2}$, volíme $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ takže

$\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \in (0, \infty)$

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n^2}$ konverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n absolutně konverguje.

(f) $a_n = \sqrt[3]{n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1} = \dfrac{(\sqrt[3]{n^4+1})^3 - (\sqrt[3]{n^4-1})^3}{\left(\sqrt[3]{n^4+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n^4+1} \cdot \sqrt[3]{n^4-1} + \left(\sqrt[3]{n^4-1}\right)^2} =$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}} + \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}}\right)^2} \cdot \frac{1}{n^{8/3}}, \text{ volíme } b_n = \frac{1}{n^{8/3}} \text{ takže}$$

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}} + \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}}\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3} \in (0,\infty)$$

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n^{8/3}}$ konverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n absolutně konverguje.

(g) $a_n = \sin\frac{1}{n^2+1} = \frac{\sin\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} \cdot \frac{1}{n^2+1}$, volíme $b_n = \frac{1}{n^2}$ takže

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{\sin\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \in (0,\infty)$$

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n^2}$ konverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n absolutně konverguje.

(h) $a_n = \operatorname{tg}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{-1}{n}$, volíme $b_n = \frac{1}{n}$ takže

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{\operatorname{tg}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \in (0,\infty)$$

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n}$ diverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n diverguje.

(i) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sinh\frac{n}{n^2-2} = \frac{\sinh\frac{n}{n^2-2}}{\frac{n}{n^2-2}} \cdot \frac{n}{n^2(1-\frac{2}{n^2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, volíme $b_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$ takže pro $n \geq 2$ máme

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{\sinh\frac{n}{n^2-2}}{\frac{n}{n^2-2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \in (0,\infty)$$

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n absolutně konverguje.

(j) $a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{3n^2+7}{7n^3+2}\right) = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{3n^2+7}{7n^3+2}\right)}{\frac{3n^2+7}{7n^3+2}} \cdot \frac{3+\frac{7}{n^2}}{7+\frac{2}{n^3}} \cdot \frac{n^2}{n^3}$, volíme $b_n = \frac{1}{n}$ takže

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{3n^2+7}{7n^3+2}\right)}{\frac{3n^2+7}{7n^3+2}} \cdot \frac{3+\frac{7}{n^2}}{7+\frac{2}{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{7} \in (0,\infty)$$

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n}$ diverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n diverguje.

(k) $a_n = \sin\left(e^{\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}} - 1\right) =$

$$= \frac{\sin\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}} - 1\right)}{e^{\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}} - 1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \text{ volíme } b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

takže $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{\sin\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}}-1\right)}{e^{\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}}-1} \cdot \dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \in$ $(0,\infty)$

Řada s členy $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ konverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n absolutně konverguje.

(l) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[3]{n}} = \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln 3}-1}{\frac{1}{n}\ln 3} \cdot \dfrac{\ln 3}{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, volíme $b_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{3}}}$ takže

$\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln 3}-1}{\frac{1}{n}\ln 3} \cdot \ln 3 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 3 \in (0,\infty)$

Řada s členy $b_n = \frac{1}{n^{4/3}}$ konverguje $\overset{(LSK)}{\Rightarrow}$ řada s členy a_n absolutně konverguje.

Úloha 2: Všechny řady v této úloze (s výjimkou části (c) a (e)) mají kladné členy (od nějakého indexu n_0). Proto v těchto situacích (tj. až na (c) a (e)) stačí vyšetřovat absolutní konvergenci (neabsolutní konvergence zde nenastává) a pokud řada nekonverguje absolutně, pak diverguje.

(a) Pro $a \le 0$ je $\dfrac{1}{n\ln^a n} \ge \dfrac{1}{n} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\ln^a 2}}_{>0}$ pro $n \ge 2$, a jelikož řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, je i naše původní řada divergentní.

Pro $a > 0$ použijeme integrální kritérium: *Pro kladnou nerostoucí funkci $f(x)$ na intervalu $\langle 2,\infty)$, řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ konverguje právě když zobecněný Riemannův integrál $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ je konečný.*

Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^a x}$ je nerostoucí na $\langle 2,\infty)$ (pro $a > 0$). Pro $c > 2$ máme

$$\int_2^c \frac{1}{x\ln^a x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} y = \ln x \\ dy = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{y^a}\,dy$$

takže $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{y^a}\,dy = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^a}\,dy \begin{cases} \textit{konv.}, & a > 1 \\ \textit{div.}, & 1 \ge a > 0. \end{cases}$

Závěr: řada konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $1 \ge a$.

(b) Pro $a = 0$ není splněna nutná podmínka konvergence řady, tj. $1-\cos(n^0) \not\to 0$ pro $n \to \infty$.

Pro $a > 0$ si vzpomene na Taylorův polynom funkce $\cos x$ v bodě 0 a proto si vezmeme limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$. Díky ní volíme $b_n = \dfrac{1}{n^{2a}}$ a máme

$\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)}{\left(\frac{1}{n^a}\right)^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \in (0,\infty)$ a použijeme limitní srovnávací kritérium, takže:

Řada s členy a_n konverguje $\overset{(LSK)}{\Leftrightarrow}$ řada s členy $b_n = \dfrac{1}{n^{2a}}$ absolutně konverguje.

Celkem: řada konverguje pro $a > \frac{1}{2}$ a diverguje pro $\frac{1}{2} \geq a \geq 0$.

(c) Protože $\sin x < x$ pro $x > 0$, má řada samé záporné členy, tedy opět stačí vyšetřovat absolutní konvergenci. Vzpomene si na Taylorův polynom funkce $\sin x$ v bodě 0 a proto si vezmeme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{6x} = -\dfrac{1}{6}$. Díky ní volíme $b_n = \dfrac{1}{n^{3-a}}$ a máme $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6} \in (0,\infty)$ a použijeme limitní srovnávací kritérium, takže:

Řada s členy a_n konverguje $\overset{(LSK)}{\Leftrightarrow}$ řada s členy $b_n = \dfrac{1}{n^{3-a}}$ absolutně konverguje.

Celkem: řada konverguje pro $2 > a$ a diverguje pro $a \geq 2$.

(d) $a_n = \sqrt{n^a + 1} - \sqrt{n^a - 1} = \dfrac{2}{\sqrt{n^a+1} + \sqrt{n^a-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^a}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^a}}} \cdot \dfrac{1}{n^{a/2}}$

Tedy volíme $b_n = \dfrac{1}{n^{a/2}}$ a máme $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^a}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^a}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \in (0,\infty)$ protože je $a > 0$. Z limitního srovnávacího kritéria plyne, že:

Řada s členy a_n konverguje $\overset{(LSK)}{\Leftrightarrow}$ řada s členy $b_n = \dfrac{1}{n^{a/2}}$ absolutně konverguje.

Celkem: řada konverguje pro $a > 2$ a diverguje pro $2 \geq a > 0$.

(e) Použijeme limitní podílové kritérium

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a|^{n+1}}{3^{2n+3} + n + 1} \cdot \frac{3^{2n+1} + n}{|a|^n} = \frac{|a|}{9} \cdot \frac{1 + \frac{n}{3^{2n+1}}}{1 + \frac{n+1}{3^{2n+3}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|a|}{9}$$

Pro $|a| > 9$ tedy řada diverguje a pro $|a| < 9$ (absolutně) konverguje. Pro pro $a = \pm 9$ je $|a_n| = \dfrac{9^n}{3^{2n+1} + n} = \dfrac{1}{3 + \frac{n}{9^n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3} \neq 0$ takže není splněna nutná podmínka pro konvergenci řady.

Celkem: řada konverguje pro $|a| < 9$ a diverguje pro $|a| \geq 9$.

(f) $a_n = n^a \ln \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot n^{a-1}$

Tedy volíme $b_n = \dfrac{1}{n^{1-a}}$ a máme $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \in (0,\infty)$. Z limitního srovnávacího kritéria plyne, že:

Řada s členy a_n konverguje $\overset{(LSK)}{\Leftrightarrow}$ řada s členy $b_n = \dfrac{1}{n^{1-a}}$ absolutně konverguje.

Celkem: řada konverguje pro $a < 0$ a diverguje pro $a \geq 0$.

(g) Vzpomene si na Taylorův polynom funkce e^x v bodě 0 a proto si vezmeme limitu $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$. Díky ní volíme $b_n = \frac{1}{n^{2-a}}$ a máme

$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \in (0, \infty)$ a použijeme limitní srovnávací kritérium, takže:

Řada s členy a_n konverguje $\overset{(LSK)}{\Leftrightarrow}$ řada s členy $b_n = \frac{1}{n^{2-a}}$ absolutně konverguje.

Celkem: řada konverguje pro $1 > a$ a diverguje pro $a \geq 1$.

(h) Použijeme limitní podílové kritérium

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{4^{n+1}}{3^{n+3} + (n+1)^a} \cdot \frac{3^{n+2} + n^a}{4^n} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 + \frac{n^a}{3^{n+2}}}{1 + \frac{(n+1)^a}{3^{n+3}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{3} > 1$$

(protože $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$ pro $a > 1$ a $k \in \mathbb{N}$).

Celkem: řada diverguje pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

(i) Prozkoumáme nutnou podmínku pro konvergenci řady:

$$a_n = e^{n^{a-1} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ e, & a = 1 \\ 1, & a < 1 \end{cases}$$

Celkem: řada diverguje pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

Úloha 3:

(a) Všechny členy jsou kladné. Použijeme limitní podílové kritérium:

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$, takže řada absolutně konverguje.

(b) Všechny členy pro $n \geq 2$ jsou kladné. Použijeme limitní podílové kritérium:

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{n+1} + (-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n + (-1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1 + \frac{(-100)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{1 + \frac{(-1)^n}{n^n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e > 1$, takže řada diverguje.

(c) Prozkoumáme nutnou podmínku pro konvergenci řady:

$|a_n| = \frac{|(-3)^n + n|}{2^n + 10} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1 + \frac{n}{(-3)^n}}{1 + \frac{10}{2^n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \neq 0$, takže řada diverguje.

(d) Prozkoumáme nutnou podmínku pro konvergenci řady:

$|a_n| = \frac{n!}{n! + 10n} = \frac{1}{1 + \frac{10n}{n!}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$, takže řada diverguje.

(e) Všechny členy jsou kladné. Použijeme limitní podílové kritérium:

$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{4^{n+1}+(n+1)^5}{(n+1)^4+5^{n+1}} \cdot \dfrac{n^4+5^n}{4^n+n^5} = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1+\frac{(n+1)^5}{4^{n+1}}}{\frac{(n+1)^4}{5^{n+1}}+1} \cdot \dfrac{\frac{n^4}{5^n}+1}{1+\frac{n^5}{4^n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{4}{5} < 1$, takže řada absolutně konverguje.

(f) Všechny členy jsou kladné. Použijeme limitní podílové kritérium:

$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{e^{n+1}-e^{-(n+1)}}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{3^n}{e^n-e^{-n}} = \dfrac{e}{3} \cdot \dfrac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{e}{3} < 1$, takže řada absolutně konverguje.

(g) Všechny členy jsou kladné. Použijeme limitní odmocninové kritérium:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n = e^{-2\cdot\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}{-\frac{2}{n}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-2} < 1$, takže řada absolutně konverguje.

(h) Prozkoumáme nutnou podmínku pro konvergenci řady:

$|a_n| = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n = e^{-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0$, takže řada diverguje.

(i) Všechny členy jsou kladné. Použijeme limitní odmocninové kritérium:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1-\dfrac{4}{n+4}\right)^n = e^{-\frac{4n}{n+4}\cdot\frac{\ln\left(1-\frac{4}{n+4}\right)}{-\frac{4}{n+4}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-4} < 1$, takže řada absolutně konverguje.

(j) Prozkoumáme nutnou podmínku pro konvergenci řady:

$|a_n| = \sqrt[n]{n+2} = e^{\frac{\ln(n+2)}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^0 \neq 0$, takže řada diverguje.

(k) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^{n^2}+1}{5^{n^2}}} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \cdot \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{3^{n^2}}} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{3^{n^2}}\right)}$

Tedy volíme $b_n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ a máme $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{3^{n^2}}\right)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 \in (0,\infty)$. Protože řada s členy $b_n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ absolutně konverguje tak, z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada s členy a_n konverguje.

(l) Všechny členy jsou kladné. Použijeme limitní odmocninové kritérium:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)^n}{n^{2n}}} = \dfrac{2n}{n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$, takže řada absolutně konverguje.

(m) Nejdříve si ukážeme, že členy a_n jsou kladné od nějakého n_0. Máme

$$n! - \pi^n = n! \cdot \left(1 - \frac{\pi^n}{n!}\right)$$

a pomocí odhadu (pro $n \geq 4$)

$$0 \leq \frac{\pi^n}{n!} = \frac{\pi^n}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 5 \cdots n} \leq \frac{\pi^3 \cdot \pi^{n-3}}{6 \cdot 4^{n-3}} = \frac{\pi^3}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n-3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

vidíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi^n}{n!} = 0$. Díky této limitě je $n! - \pi^n = n! \cdot \underbrace{\left(1 - \dfrac{\pi^n}{n!}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \dfrac{n!}{2} > 0$ od nějakého n_0 a tedy členy a_n jsou kladné od nějakého n_0.

Víme proto, že absolutní konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je totéž jako (obyčejná) konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dále máme

$$a_n = \frac{3n^{10} + 10 \cdot 4^n}{n! - \pi^n} = \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{\frac{3n^{10}}{4^n} + 10}{1 - \frac{\pi^n}{n!}}$$

tedy zvolíme srovnání s jednodušší řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $b_n = \dfrac{4^n}{n!}$.
Díky limitnímu srovnávacímu kritériu a limitě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^{10}}{4^n} + 10}{1 - \frac{\pi^n}{n!}} = 10 \in (0, \infty)$$

kde jsme využili výše zmíněnou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi^n}{n!} = 0$ a limitu z přednášky $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{a^x} = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $a > 1$ (v rámci věty o limitě složené funkce a posloupnosti), máme, že

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně} \Leftrightarrow \text{řada} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje absolutně.}$$

Nyní vyšetříme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ např. pomocí limitního podílového kritéria. Máme

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^n} = \frac{4}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

a proto řada s členy b_n absolutně konverguje a tedy i *řada s členy a_n absolutně konverguje.*

(n) Všechny členy jsou nezáporné. Použijeme limitní odmocninové kritérium:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}} = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e^{-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1$, takže řada absolutně konverguje.

(o) Všechny členy jsou nezáporné. Použijeme limitní odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+n+2}\right)^{n^4}} = \left(1 - \frac{1}{2n^2+n+2}\right)^{n^3} =$$

$$= e^{-\frac{n^3}{2n^2+n+2} \cdot \frac{\ln\left(1-\frac{1}{2n^2+n+2}\right)}{-\frac{1}{2n^2+n+2}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

takže řada absolutně konverguje.

Úloha 4:

(a) Řada má všechny členy kladné. Prozkoumáme rychlost konvergence funkce

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x)$$

v bodě $x = 0$ (zprava). Tedy uvažujme limitu pro (zatím neznámé) $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x)}{x^\alpha} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\alpha^{-1} \cdot x^{1-\alpha}}{\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{x}} \overset{(\alpha=\frac{1}{2})}{=}$$

$$\overset{(\alpha=\frac{1}{2})}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}$$

Tedy zvolili jsme $\alpha = \dfrac{1}{2}$ a proto zvolíme srovnání s radou se cleny $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Pak máme

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2} \in (0, \infty).$$

Protože řada s členy $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje tak, z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada s členy a_n také diverguje.

(b) Řada má všechny členy kladné. Prozkoumáme rychlost konvergence funkce

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)$$

v okolí ∞. Tedy uvažujme limitu pro (zatím neznámé) $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}} \overset{(\alpha=1)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Tedy zvolili jsme $\alpha = 1$ a proto zvolíme srovnání s radou se cleny $b_n = \dfrac{1}{n}$. Pak máme

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n}{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \in (0, \infty).$$

Protože řada s členy $b_n = \dfrac{1}{n}$ diverguje tak, z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada s členy a_n také diverguje.

(c) Řada má všechny členy kladné. Využijeme rychlost konvergence (a tedy limitu) z úlohy (b) a zvolíme srovnání s radou s cleny $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Pak máme

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,(n^2)}{\frac{1}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \in (0, \infty).$$

Protože řada s členy $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ absolutně konverguje tak, z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada s členy a_n také absolutně konverguje.