

2. cvičení z Matematické analýzy 1

30. září - 4. října 2024

Úloha 1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou shora nebo zdola omezené. Najděte jejich supremum, infimum a maximum, minimum, existují-li.

- (a) $\{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (c) $(-1, 2] \cup (3, 7]$
- (d) $[0, 2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ (e) $[0, \frac{1}{5}] \cap \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (f) $\left\{\frac{p}{p+q} \mid p, q \in \mathbb{N}\right\}$
- (g) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (h) $\{m^2 - n^2 \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ (i) $\{n^{(-1)^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Úloha 2. Dokažte nebo vyvráťte, že funkce dané následujícími předpisy jsou sudé/liché:

$$f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) .$$

Úloha 3. Doplňte následující tabulku (S = daná funkce je sudá, L = daná funkce je lichá, N = nelze obecně rozhodnout).

f	g	$f + g$	$f \cdot g$	$f \circ g$
S	S			
L	L			
S	L			
L	S			

Úloha 4. Charakterizujte (určete, právě jaké vlastnosti musejí mít) všechna zobrazení $f : X \rightarrow Y$, která splňují:

$$(a) \forall A \subseteq X \quad f^{-1}(f(A)) = A \qquad (b) \forall B \subseteq X \quad f^{-1}(f(B)) = B .$$

Úloha 5. Necht pro každé $n \in \mathbb{N}$ je A_n spčetná množina. Dokažte, že následující množiny jsou spčetné, tedy najdete bijekci mezi danou množinou a množinou $\mathbb{N}$.

- (a) $\mathbb{Z}$ (b) $A_1 \cup A_2$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Úloha 6. (a) Najděte základní periodu pro každou z funkcí f a g . Mají společnou periodu? Pokud ano, jakou?

$$f(x) = \sin\left(\frac{5x+9}{12}\right) \qquad g(x) = \cos\left(\frac{2x}{35} - 11\right)$$

(Základní perioda je nejmenší kladná perioda (pokud taková existuje), se kterou je funkce periodická).

(b) Necht funkce u má periodu $p > 0$. Jakou periodu má funkce daná předpisem

$$v(x) = u(ax + b)$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$?